Первое из равенств (9.11) дает

$$\frac{d\Xi}{dt}=\left(\frac{2}{h_0}+\frac{h_0}{h^2}\right)\frac{dh}{dt},$$

откуда, учитывая (7.24), а также то, что в принятых здесь обозначениях Ганзена

$$r^2\frac{dw}{dt}=k_1\sqrt{p}=k_1^2h^{-1},$$

получим

$$\frac{d\Xi}{dt}=-\frac{h_0}{k_1^2}\left(1+\frac{2h^2}{h_0^2}\right)\frac{\partial R}{\partial w}. \tag{10.6}$$

Из соотношений (9.5) и (9.11) имеем

$$\Upsilon=\frac{2h}{h_0(1-e_0^2)}\left[e\cos(\chi-\pi_0)-e_0\right],$$

$$\Psi=\frac{2h}{h_0(1-e_0^2)}\,e\sin(\chi-\pi_0).$$

Отсюда, после дифференцирования этих выражений и использования уравнений Эйлера (§ 6 гл. XVI), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Upsilon}{dt}&=\frac{2h}{k_1^2}\left[\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\cos f+\frac{e}{1-e^2}\right]\frac{\partial R}{\partial w}+\frac{2ah}{k_1^2}\sin f\,\frac{\partial R}{\partial r},\\ \frac{d\Psi}{dt}&=\frac{2h}{k_1^2}\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\,\frac{\partial R}{\partial w}-\frac{2ah}{k_1^2}\cos f\,\frac{\partial R}{\partial r}.\end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

Интегрирование уравнений (10.6) и (10.7), выполняемое, как всегда, последовательными приближениями, даст все более и более точные значения W, а следовательно, и полярных координат w и r.

§ 11. Метод Ганзена. Широта планеты

При нахождении эклиптических координат l и b точные формулы (8.7) почти всегда могут быть заменены более простыми:

$$\left.\begin{aligned}\cos b\sin(l-\Omega_0)&=\cos i_0\sin(w-\Omega_0)-s\operatorname{tg} i_0,\\ \cos b\cos(l-\Omega_0)&=\cos(w-\Omega_0),\\ \sin b&=\sin i_0\sin(w-\Omega_0)+s.\end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

Задача вычисления этих координат приводится, таким образом, к нахождению величины

$$s=M\sin(w-\Omega_0)-L\cos(w-\Omega_0),$$

где L и M определяются формулами (8.9), которые можно написать так (§ 9):

$$\left.\begin{aligned} L &= \int_0^t hr\cos i\sin(w-\Omega_0)\frac{\partial R}{\partial Z}\,dt, \\ M &= \int_0^t hr\cos i\cos(w-\Omega_0)\frac{\partial R}{\partial Z}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Вместо s введем в качестве неизвестной величину

$$u=\frac{r_0}{a_0}s=M\frac{r_0}{a_0}\sin(f_0+\pi_0-\Omega_0)-L\frac{r_0}{a_0}\cos(f_0+\pi_0-\Omega_0). \tag{11.3}$$

Пользуясь приемом Ганзена, использованном в предыдущем параграфе, мы можем написать

$$u=\bar{N}, \tag{11.4}$$

где, аналогично (10.2),

$$\bar{N}=M\frac{\rho_0}{a_0}\sin(\omega_0+\pi_0-\Omega_0)-L\frac{\rho_0}{a_0}\cos(\omega_0+\pi_0-\Omega_0). \tag{11.5}$$

Равенства (11.2) и (11.5) показывают, что

$$\frac{dN}{dt}=\frac{\partial R}{\partial Z}h\cos i\frac{\rho_0}{a_0}r\sin(\omega_0-f_0).$$

После того, как интегрирование этого выражения (при условии, что $N=0$ при $t=0$) даст функцию N, формула (11.4) даст u, а следовательно, и s.

Можно получить другое выражение для u, аналогичное (10.5). Для этого заметим, что

$$\overline{\left(\frac{dN}{dt}\right)}=\int_0^t\frac{\partial R}{\partial Z}hr\cos i\cos(w-\Omega_0)\,dt\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{r}{a}\sin(w-\Omega_0)\right]-$$
$$-\int_0^t\frac{\partial R}{\partial Z}hr\cos i\sin(w-\Omega_0)\,dt\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{r}{a}\cos(w-\Omega_0)\right].$$

Интегрирование по частям стоящего справа выражения показывает, что

$$\int_0^t\overline{\left(\frac{dN}{d\tau}\right)}dt=M\frac{r}{a}\sin(w-\Omega_0)-L\frac{r}{a}\cos(w-\Omega_0).$$

Следовательно,

$$u = \int_0^t \overline{\left(\frac{dN}{d\tau}\right)} dt. \tag{11.6}$$

Изложенный здесь способ нахождения дополнительных членов в правых частях формул (8.7) дает только возмущения первого порядка. Но его легко обобщить и сделать пригодным для получения возмущений высших порядков.

§ 12. Метод Ганзена. Дополнительные замечания

В предыдущих параграфах были выведены дифференциальные уравнения, позволяющие находить возмущения средней аномалии, радиуса-вектора и широты. Решение этих уравнений, приводящееся к выполнению в каждом приближении квадратур, принципиальных трудностей не представляет. Разработанные здесь технические приемы лучше всего изучать при помощи тех подробных изложений метода Ганзена, которые связаны с приложением этого метода к фактическому вычислению планетных возмущений. Помимо основного сочинения Ганзена [1857—1861], в котором он приложил свой метод к вычислению возмущений первого и второго порядков малой планеты (13) Egeria, здесь прежде всего должна быть указана фундаментальная работа Хилла [1890], посвященная теории движения Юпитера и Сатурна. В этой работе в метод Ганзена был внесен ряд существенных улучшений и был подробно разработан вопрос о нахождении возмущений второго и частично третьего порядка.

Следует заметить, что при нахождении возмущений первого порядка различные методы требуют приблизительно одинакового количества вычислений. Существенное различие в этом отношении имеет место лишь при нахождении возмущений высших порядков. Тут преимущества метода Ганзена весьма заметны, что объясняется малой величиной возмущений величин z, ν и u по сравнению с возмущениями других величин, могущих служить для нахождения положения планеты.

Именно по этой причине метод Ганзена был избран Хиллом для построения теорий движения Юпитера и Сатурна. Эти же причины заставили предпочесть метод Ганзена при переработке теории движения Марса, предпринятой Клеменсом [1949, 1961].

В уравнениях Ганзена пертурбационная функция содержит, как легко видеть, нечетные отрицательные степени расстояний между возмущаемой и возмущающими планетами. При интегрировании этих уравнений можно пользоваться различными формами разложений этих величин в тригонометрические ряды. В работе 1831 г. о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна,