Следовательно,

$$u = \int_0^t \overline{\left(\frac{dN}{d\tau}\right)} dt. \qquad (11.6)$$

Изложенный здесь способ нахождения дополнительных членов в правых частях формул (8.7) дает только возмущения первого порядка. Но его легко обобщить и сделать пригодным для получения возмущений высших порядков.

§ 12. Метод Ганзена. Дополнительные замечания

В предыдущих параграфах были выведены дифференциальные уравнения, позволяющие находить возмущения средней аномалии, радиуса-вектора и широты. Решение этих уравнений, приводящееся к выполнению в каждом приближении квадратур, принципиальных трудностей не представляет. Разработанные здесь технические приемы лучше всего изучать при помощи тех подробных изложений метода Ганзена, которые связаны с приложением этого метода к фактическому вычислению планетных возмущений. Помимо основного сочинения Ганзена [1857—1861], в котором он приложил свой метод к вычислению возмущений первого и второго порядков малой планеты (13) Egeria, здесь прежде всего должна быть указана фундаментальная работа Хилла [1890], посвященная теории движения Юпитера и Сатурна. В этой работе в метод Ганзена был внесен ряд существенных улучшений и был подробно разработан вопрос о нахождении возмущений второго и частично третьего порядка.

Следует заметить, что при нахождении возмущений первого порядка различные методы требуют приблизительно одинакового количества вычислений. Существенное различие в этом отношении имеет место лишь при нахождении возмущений высших порядков. Тут преимущества метода Ганзена весьма заметны, что объясняется малой величиной возмущений величин z, ν и u по сравнению с возмущениями других величин, могущих служить для нахождения положения планеты.

Именно по этой причине метод Ганзена был избран Хиллом для построения теорий движения Юпитера и Сатурна. Эти же причины заставили предпочесть метод Ганзена при переработке теории движения Марса, предпринятой Клеменсом [1949, 1961].

В уравнениях Ганзена пертурбационная функция содержит, как легко видеть, нечетные отрицательные степени расстояний между возмущаемой и возмущающими планетами. При интегрировании этих уравнений можно пользоваться различными формами разложений этих величин в тригонометрические ряды. В работе 1831 г. о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна, в которой Ганзен впервые изложил свой метод и успешно применил его к задаче нахождения возмущений второго порядка (еще не имевшей удовлетворительного решения), он пользовался обычными разложениями по кратным средних аномалий. Но в своих позднейших работах [1857—1861] он стал пользоваться разложениями по кратным E и μE (§ 15 гл. XVII), а за независимую переменную принял эксцентрическую аномалию E. Такая замена независимой переменной позволяет ускорить сходимость рядов, расположенных по степеням эксцентриситета возмущаемой планеты. Но эта выгода не окупает, по крайней мере в обычно встречающихся случаях, тех громоздких преобразований, которые здесь приходится делать, и сложной формы окончательных результатов. Вот почему Хилл, а затем и Клеменс в указанных выше работах отказались от употребления эксцентрической аномалии в качестве независимой переменной и вернулись к разложениям по кратным средних аномалий, т. е. к употреблению времени в качестве независимой переменной.

Метод Ганзена излагается и применяется либо в той форме, в которой он был дан самим Ганзеном, либо с теми изменениями, которые были внесены Хиллом [М. Ф. Хандриков, 1883; Тиссеран, 1896; Сундман, 1915]. Существенно иную форму этому методу придал Андуайе [1926]. Некоторые вопросы, например, нахождение постоянных интегрирования, с большой подробностью рассмотрены в книге Брауэра и Клеменса [1961].

§ 13. Возмущения прямоугольных координат. Метод Энке

Наиболее прямой путь для получения прямоугольных координат x, y, z рассматриваемой планеты заключается в решении дифференциальных уравнений возмущенного движения в их первоначальной форме:

$$\ddot{x}+k_1^2\, x r^{-3}=\partial R/\partial x;\ \ldots, \tag{13.1}$$

где $k_1^2=k^2(1+m)$, а через R обозначена пертурбационная функция (§ 4 гл. XIV).

В том случае, когда решение системы (13.1) выполняется численными методами, такой способ получения возмущенных координат давно уже стал основным, наиболее широко употребляемым. Возможность использовать уравнения (13.1) для непосредственного получения координат x, y, z в форме аналитических функций времени совершенно очевидна и является, с математической точки зрения, наиболее прямым способом решения задачи. Однако практические соображения, прежде всего желание по возможности сократить вычисления, заставили Клеро, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Ганзена и их последователей