в которой Ганзен впервые изложил свой метод и успешно применил его к задаче нахождения возмущений второго порядка (еще не имевшей удовлетворительного решения), он пользовался обычными разложениями по кратным средних аномалий. Но в своих позднейших работах [1857—1861] он стал пользоваться разложениями по кратным E и μE (§ 15 гл. XVII), а за независимую переменную принял эксцентрическую аномалию E. Такая замена независимой переменной позволяет ускорить сходимость рядов, расположенных по степеням эксцентриситета возмущаемой планеты. Но эта выгода не окупает, по крайней мере в обычно встречающихся случаях, тех громоздких преобразований, которые здесь приходится делать, и сложной формы окончательных результатов. Вот почему Хилл, а затем и Клеменс в указанных выше работах отказались от употребления эксцентрической аномалии в качестве независимой переменной и вернулись к разложениям по кратным средних аномалий, т. е. к употреблению времени в качестве независимой переменной.

Метод Ганзена излагается и применяется либо в той форме, в которой он был дан самим Ганзеном, либо с теми изменениями, которые были внесены Хиллом [М. Ф. Хандриков, 1883; Тиссеран, 1896; Сундман, 1915]. Существенно иную форму этому методу придал Андуайе [1926]. Некоторые вопросы, например, нахождение постоянных интегрирования, с большой подробностью рассмотрены в книге Брауэра и Клеменса [1961].

§ 13. Возмущения прямоугольных координат. Метод Энке

Наиболее прямой путь для получения прямоугольных координат x, y, z рассматриваемой планеты заключается в решении дифференциальных уравнений возмущенного движения в их первоначальной форме:

$$\ddot{x}+k_1^2 x r^{-3}=\partial R/\partial x; \ \ldots, \tag{13.1}$$

где $k_1^2=k^2(1+m)$, а через R обозначена пертурбационная функция (§ 4 гл. XIV).

В том случае, когда решение системы (13.1) выполняется численными методами, такой способ получения возмущенных координат давно уже стал основным, наиболее широко употребляемым. Возможность использовать уравнения (13.1) для непосредственного получения координат x, y, z в форме аналитических функций времени совершенно очевидна и является, с математической точки зрения, наиболее прямым способом решения задачи. Однако практические соображения, прежде всего желание по возможности сократить вычисления, заставили Клеро, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Ганзена и их последователей отказаться от этого теоретически простейшего решения и создать рассмотренные выше методы нахождения возмущенных координат.

Метод аналитического решения уравнений возмущенного движения в форме (13.1), впервые детально разработанный Энке в 1857 г., заключается в следующем.

Пусть

$$x = x_0 + \delta x;\quad y = y_0 + \delta y;\quad z = z_0 + \delta z;\quad r = r_0 + \delta r, \tag{13.2}$$

где через x_0, y_0, z_0, r_0 обозначены значения x, y, ..., соответствующие эллиптической орбите, удовлетворяющей уравнениям (13.1) при $R = 0$. Таким образом,

$$\ddot{x}_0 + k_1^2 r_0^{-3} x_0 = 0;\ \ldots$$

Вычтя эти равенства почленно из (13.1), получнм

$$\frac{d^2\,\delta x}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3}\,\delta x = \frac{\partial R}{\partial x} + k_1^2 x\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right);\ \ldots \tag{13.3}$$

Так как

$$\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} = 3\frac{\delta r}{r_0^4} - 6\frac{\delta r^2}{r_0^5} + \ldots,$$

то для вычисления возмущений первого порядка вместо уравнений (13.3) можно взять такие:

$$\frac{d^2\,\delta x}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3}\,\delta x = \frac{\partial R_0}{\partial x_0} + \frac{3k_1^2 x_0}{r_0^5}(r_0\delta r);\ \ldots, \tag{13.4}$$

где через R_0 обозначена пертурбационная функция R после замены x, y, z через x_0, y_0, z_0.

Эллиптическую орбиту, дающую исходные величины x_0, y_0, z_0, можно выбрать произвольно, так как решение уравнений (13.4) или (13.3) введет в выражения (13.2) нужное число постоянных интегрирования. Но, конечно, выгоднее эту орбиту выбрать так, чтобы для рассматриваемого интервала времени возмущения δx, δy, δz были по возможности малы.

Энке предложил дополнить систему (13.3) уравнением (3.5), имеющим ту же форму по отношению к величине $r_0\delta r$. Это уравнение легко может быть выведено непосредственно из уравнений (13.1). В самом деле, очевидные комбинации равенств (13.1) дают следующие соотношения:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + k_1^2 r^{-1} = r\frac{\partial R}{\partial r}, \tag{13.5}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2k_1^2 r^{-1} = 2\int d'R + K, \tag{13.6}$$

$$d'R = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz,$$

где через K обозначена постоянная, введенная интегрированием.

Почленное сложение соотношений (13.5) и (13.6) дает

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - k_1^2 r^{-1} = r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int d'R + K.$$

Подставив в левую часть этого равенства значение r, даваемое (13.2), окончательно будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{d^2(r_0\delta r)}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-3}(r_0\delta r) =$$
$$= r\frac{\partial R}{\partial r} + 2\int d'R - \frac{1}{2}\frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2} + k_1^2 r_0^{-2} r^{-1}(\delta r)^2 + K. \quad (13.7)$$

Задача приводится к совместному решению уравнений (13.3) и (13.7), а в случае вычисления возмущений первого порядка — к решению уравнений (13.4) и (13.7), причем в этом последнем уравнении здесь должны быть отброшены члены второго порядка.

В каждом приближении приходится, таким образом, решать уравнения вида

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = Q, \quad (13.8)$$

где через Q обозначена известная функция времени.

В § 3 было показано, что решение уравнения (13.8) дается формулой

$$n_0 q = K_1 q_1 + K_2 q_2 + q_2\int q_1 Q\,dt - q_1\int q_2 Q\,dt, \quad (13.9)$$

где

$$q_1 = \cos E - e_0; \quad q_2 = \sin E,$$

а через K_1, K_2 обозначены постоянные, введенные интегрированием.

Присоединение уравнения (13.7) к уравнениям (13.3), или (13.4) упрощает процесс интегрирования, но вводит три лишние произвольные постоянные. Чтобы число постоянных свести к шести, можно воспользоваться прежде всего соотношением

$$2(r_0\delta r) = 2(x_0\delta x + y_0\delta y + z_0\delta z) + (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 - (\delta r)^2,$$

получаемым путем подстановки выражений (13.2) в равенство

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Если ограничиться возмущениями первого порядка, то это соотношение принимает вид

$$r_0\delta r - x_0\delta x - y_0\delta y - z_0\delta z = 0.$$

Подставив сюда решения вида (13.9), полученные для уравнений (13.4) и (13.7), и выделив постоянные части в x_0, y_0, z_0, мы получим, как нетрудно видеть, два соотношения между девятью постоянными. Третье соотношение дает интеграл энергии (13.6).

Изложенный метод получения аналитических выражений возмущенных прямоугольных координат планеты не имеет преимуществ перед методами, рассмотренными в предыдущих параграфах, даже если ограничиться возмущениями первого порядка. При вычислении возмущений высших порядков он будет еще менее выгоден, так как возмущения в прямоугольных координатах значительно больше, нежели в полярных, употребляемых в методе Лапласа, не говоря уже о возмущениях в величинах z, v, u, являющихся неизвестными в методе Ганзена. Можно, как это было предложено Брюнновым еще в 1857 г., принять за плоскость xy плоскость оскулирующей (или средней) орбиты, что уменьшит возмущения δz третьей координаты. Но возмущения двух других координат будут все же много больше соответствующих величин в других методах. Все это объясняет, почему не было попыток применить разработанный Энке метод к вычислению возмущений планет в тех случаях, когда требуется значительная точность.

Стремление избежать недостатков, присущих методу Энке, привело к созданию метода Хилла, который будет рассмотрен в следующем параграфе. Другой путь для достижения той же цели был указан Брауэром [1944]. Разработанный Брауэром метод позволяет обходиться без вычисления возмущений радиуса-вектора и гораздо более приспособлен к нахождению возмущений высших порядков, нежели метод Энке. В несколько иной форме метод Брауэра был представлен Дэнбн [1962]. В. Т. Гонтковская [1958] видоизменила этот метод введением истинной аномалии в качестве независимой переменной и детально изучила вопрос о применении в нем быстродействующих вычислнтельных машин.

Мы ограничимся этими замечаниями, поскольку метод Брауэра подробно изложен в недавно вышедшей книге [Брауэр и Клеменс, 1961].

§ 14. Метод Хилла

Метод, опубликованный Хиллом в 1874 г. [Хилл, 1874], получился в результате введения в только что рассмотренный метод Энке трех изменений.

Если положить

$$q_1 = r_0 \delta r, \quad q_2 = \delta x, \quad q_3 = \delta y, \quad q_4 = \delta z,$$

то уравнения (13.3) и (13.7) можно написать так:

$$\ddot{q}_h + k_1^2 r_0^{-3} q_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, 3, 4), \tag{14.1}$$