девятью постоянными. Третье соотношение дает интеграл энергии (13.6).

Изложенный метод получения аналитических выражений возмущенных прямоугольных координат планеты не имеет преимуществ перед методами, рассмотренными в предыдущих параграфах, даже если ограничиться возмущениями первого порядка. При вычислении возмущений высших порядков он будет еще менее выгоден, так как возмущения в прямоугольных координатах значительно больше, нежели в полярных, употребляемых в методе Лапласа, не говоря уже о возмущениях в величинах z, ν, u, являющихся неизвестными в методе Ганзена. Можно, как это было предложено Брюнновым еще в 1857 г., принять за плоскость xy плоскость оскулирующей (или средней) орбиты, что уменьшит возмущения δz третьей координаты. Но возмущения двух других координат будут все же много больше соответствующих величин в других методах. Все это объясняет, почему не было попыток применить разработанный Энке метод к вычислению возмущений планет в тех случаях, когда требуется значительная точность.

Стремление избежать недостатков, присущих методу Энке, привело к созданию метода Хилла, который будет рассмотрен в следующем параграфе. Другой путь для достижения той же цели был указан Брауэром [1944]. Разработанный Брауэром метод позволяет обходиться без вычисления возмущений радиуса-вектора и гораздо более приспособлен к нахождению возмущений высших порядков, нежели метод Энке. В несколько иной форме метод Брауэра был представлен Дэнбн [1962]. В. Т. Гонтковская [1958] видоизменила этот метод введением истинной аномалии в качестве независимой переменной и детально изучила вопрос о применении в нем быстродействующих вычислнтельных машин.

Мы ограничимся этими замечаниями, поскольку метод Брауэра подробно изложен в недавно вышедшей книге [Брауэр и Клеменс, 1961].

§ 14. Метод Хилла

Метод, опубликованный Хиллом в 1874 г. [Хилл, 1874], получился в результате введения в только что рассмотренный метод Энке трех изменений.

Если положить

$$q_1 = r_0\delta r, \quad q_2 = \delta x, \quad q_3 = \delta y, \quad q_4 = \delta z,$$

то уравнения (13.3) и (13.7) можно написать так:

$$\ddot{q}_h + k_1^2 r_0^{-3} q_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, 3, 4), \tag{14.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= Q_r = 2\int d'R + r\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{d^2(\delta r)^2}{dt^2} + \frac{k_1^2(\delta r)^2}{r_0^2 r},\\
Q_2 &= Q_x = \frac{\partial R}{\partial x} + \left(r_0^{-3} - r^{-3}\right)k_1^2 x,\\
Q_3 &= Q_y = \frac{\partial R}{\partial y} + \left(r_0^{-3} - r^{-3}\right)k_1^2 y,\\
Q_4 &= Q_z = \frac{\partial R}{\partial z} + \left(r_0^{-3} - r^{-3}\right)k_1^2 z.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.2)$$

Решение каждого из уравнений (14.1) дается формулами (3.12) и (3.13), так что

$$q_h = n^{-1}\left(q_2\int q_1 Q_h\,dt - q_1\int q_2 Q_h\,dt\right).$$

К выражению, стоящему в скобках, Хилл применил прием, используемый в методе Ганзена. Пусть

$$N = \bar{q}_2 q_1 - \bar{q}_1 q_2,$$

где черточками отмечены величины, в которых время t заменено величиной τ. Тогда

$$q_h = n^{-1}\int N Q_h\,dt, \qquad (14.3)$$

при условии, что после интегрирования τ будет заменено на t.

Другое изменение, внесенное Хиллом, заключалось в том, что за независимую переменную он принял истинную аномалию v, соответствующую исходному невозмущенному движению. Так как

$$r_0^2\,dv = na^2\cos\varphi\,dt, \qquad (14.4)$$

а функции (3.13) через v выражаются формулами

$$q_1 = \frac{r_0}{a}\cos v; \qquad q_2 = \frac{r_0}{a\cos\varphi}\sin v,$$

то

$$N\,dt = \frac{\bar{r}_0 r_0^3}{na^4\cos^2\varphi}\sin(\bar{v} - v)\,dv.$$

Поэтому формулы (14.3) принимают вид

$$q_h = \frac{r_0}{n^2a^4\cos^2\varphi}\int Q_h r_0^3\sin(\bar{v} - v)\,dv. \qquad (14.5)$$

Эту систему четырех уравнений, служащих для нахождения только трех независимых между собой величин, Хилл заменил системой трех уравнений. С этой целью он положил

$$x = r\cos\lambda\cos\beta, \quad y = r\sin\lambda\cos\beta, \quad z = r\sin\beta, \qquad (14.6)$$

что дает

$$\lambda = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Таким образом,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Уравнения движения (13.1) показывают, что

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h_0 + \int \left(x\frac{\partial R}{\partial y} - y\frac{\partial R}{\partial x}\right)dt.$$

Полагая еще

$$Q_\lambda = x\frac{\partial R}{\partial y} - y\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \tag{14.7}$$

окончательно получим

$$(r^2 - z^2)\frac{d\lambda}{dt} = h_0 + \int Q_\lambda\, dt. \tag{14.8}$$

Постоянную h_0 определим условием

$$h_0 = x_0\frac{dy_0}{dt} - y_0\frac{dx_0}{dt} = na^2\cos\varphi\cos i,$$

дающим

$$(r_0^2 - z_0^2)\frac{d\lambda_0}{dt} = h_0, \tag{14.9}$$

где через $\lambda_0 = \operatorname{arctg}(y_0/x_0)$ обозначена долгота, соответствующая невозмущенному движению.

Положим $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$ и найдем уравнение, дающее $\delta\lambda$. Так как

$$(r^2 - z^2)\frac{d\lambda_0}{dt} - h_0 = \left[(r^2 - r_0^2) - (z^2 - z_0^2)\right]\frac{d\lambda_0}{dt} = \\ = \frac{(r + r_0)\,\delta r - (z + z_0)\,\delta z}{r_0^2 - z_0^2}\, h_0,$$

то из (14.8) и (14.9) легко выводится, учитывая (14.4), первое из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \delta\lambda &= \int \frac{r_0^2\,dv}{r^2 - z^2}\left[\frac{1}{n^2a^4\cos^2\varphi}\int Q_\lambda r_0^2\,dv - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \cos i\,\frac{(r + r_0)\,\delta r - (z + z_0)\,\delta z}{r_0^2 - z_0^2}\right], \\ \delta r &= \frac{1}{n^2a^4\cos^2\varphi}\int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v)\,dv, \\ \delta z &= \frac{r_0}{n^2a^4\cos^2\varphi}\int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v)\,dv. \end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

Два других уравнения этой системы получаются из (14.5) при $h=1$ и $h=4$.

Хилл особо подчеркивает, что уравнения (14.10) совершенно точны и могут служить для вычисления возмущений любого порядка.

Применение этих уравнений требует представления подынтегральных выражений в удобной для интегрирования форме. Подынтегральные выражения в (14.10) являются функциями средних аномалий M и M' возмущаемой и возмущающей планет. Исключение времени дает следующее соотношение:

$$M' = \frac{n'}{n} M + M'_0 - \frac{n'}{n} M_0,$$

которое можно написать так:

$$M' = \vartheta' - \frac{n'}{n}(v - M),$$

где

$$\vartheta' = \frac{n'}{n} v + M'_0 - \frac{n'}{n} M_0.$$

Отсюда ясно, что подынтегральные выражения, которые являются 2π-периодическими функциями v и M', могут быть рассматриваемы как 2π-периодические функции v и ϑ'. Тригонометрическое интерполирование (§ 12 гл. XVII) даст эти выражения в форме двойных рядов вида

$$\sum_{i,\,i'} [A_{i,\,i'} \cos(iv - i'\vartheta') + B_{i,\,i'} \sin(iv - i'\vartheta')],$$

вполне удобных для интегрирования по переменному v.

При употреблении v в качестве независимой переменной могут быть использованы и аналитические методы разложения пертурбационной функции по кратным истинных аномалий v и v' (или истинных долгот в орбитах). Такие методы [Цейпель, 1912; Браун и Шук, 1933] мало пригодны в тех случаях, когда эксцентриситеты значительны и требуется большая точность, поскольку последующее выражение v' через v, необходимое для интегрирования, требует выполнения весьма громоздких операций.

Наиболее значительным практическим применением рассматриваемого метода является теория движений Цереры, опубликованная В. Ф. Проскуриным. В его работе [Проскурин, 1952, 1962] с исчерпывающей полнотой изучены все вопросы, связанные как с вычислением возмущений первого и второго порядков, так и с нахождением постоянных интегрирования. Использование электронных вычислительных машин при применении метода Хилла было рассмотрено В. Т. Гонтковской [1958].