ГЛАВА XX

КАНОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Канонические уравнения

Рассмотрим динамическую систему, положение точек которой определяется обобщенными координатами q_k $(k=1, 2, \ldots, s)$, которые мы будем считать независимыми.

Состояние системы в момент t (т. е. положения и скорости всех ее точек) определяется значениями q_k и $\dot{q}_k$ для этого момента. Состояние системы в начальный момент и кинетический потенциал $L(t, q_k, \dot{q}_k)$ вполне определяют при помощи уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, s) \tag{1.1}$$

движение системы, т. е. ее состояние для любого момента времени.

Для всех рассматриваемых в дальнейшем систем

$$L=T+U, \tag{1.2}$$

где через T обозначена кинетическая энергия, а через U — потенциал (потенциальная энергия с обратным знаком).

Чтобы систему (1.1) заменить системой $2s$ уравнений первого порядка, можно было бы принять за вспомогательные неизвестные обобщенные скорости $\dot{q}_k$. Покажем, что для этой цели можно воспользоваться также обобщенными импульсами, т. е. величинами

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{1.3}$$

После замены прямоугольных координат их выражениями через обобщенные кинетическая энергия принимает вид

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{k}A_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k+\sum_{k}A_k\dot{q}_k+A, \tag{1.4}$$

где суммирование по каждому индексу производится от 1 до s. С другой стороны, потенциал U не зависит от $\dot{q}_i$. Поэтому равенство (1.3) имеет вид

$$p_k = \sum_i A_{ik}\dot{q}_i + A_k. \tag{1.5}$$

Как известно, для всех голономных систем (а только с такими системами и приходится иметь дело в небесной механике) определитель $\det(A_{ik})$ не равен нулю. Таким образом, уравнения (1.5) разрешимы относительно $\dot{q}_i$, а потому мы действительно можем пользоваться переменными q_k, p_k вместо q_k, $\dot{q}_k$ для определения состояния системы.

Для получения уравнений, дающих q_k и p_k, Гамильтон ввел величину

$$F = \sum p_k\dot{q}_k - L, \tag{1.6}$$

которую можно рассматривать, на основании (1.2) и (1.5), как функцию t, q_k, p_k.

Варьируя величины p_k, q_k, получим

$$\delta F = \sum \frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k + \sum \frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k.$$

С другой стороны,

$$\delta F = \delta\sum p_k\dot{q}_k - \delta L = \sum \dot{q}_k\delta p_k + \sum p_k\delta\dot{q}_k - \sum\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k - \sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_k,$$

или, пользуясь равенством (1.3),

$$\delta F = \sum \dot{q}_k\delta p_k - \sum\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k.$$

Сравнение этих двух выражений показывает, что

$$\dot{q}_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \qquad \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

Соотношения (1.1) и (1.3) дают

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}.$$

Итак, для нахождения новых неизвестных, q_k, p_k, окончательно будем иметь уравнения

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \qquad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{1.7}$$

Уравнения такого вида носят название канонических уравнений. Функция

$$F = F(t, q_k, p_k)$$

называется гамильтонианом системы (1.7).

Если функция F не зависит явно от t, то уравнения (1.7) имеют интеграл

$$F = \text{const}. \tag{1.8}$$

В том случае, когда рассматривается склерономная система, т. е. такая, в которой связи либо вовсе отсутствуют, либо не зависят от времени, интеграл (1.8) есть интеграл энергии. В самом деле, на основании (1.6), (1.3) и (1.2) его можно написать так:

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const}.$$

Но для склерономной системы T есть однородная функция второго порядка от $\dot{q}_k$, так как два последних члена в выражении (1.4) равны нулю. Поэтому стоящая здесь сумма равна $2T$, и рассматриваемый интеграл принимает, учитывая (1.2), такой вид:

$$T - U = \text{const},$$

а это есть не что иное, как закон сохранения энергии.

§ 2. Лемма Пуанкаре

Канонические уравнения обладают многими весьма замечательными и весьма важными для динамики свойствами. Те свойства этих уравнений, которые нам понадобятся в дальнейшем, очень просто выводятся, как показал Пуанкаре [1905], из следующего предложения.

Лемма Пуанкаре. Если общее решение канонической системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{2.1}$$

дается формулами

$$q_k = q_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s}), \quad p_k = p_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s}), \tag{2.2}$$

где через $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2s}$ обозначены постоянные интегрирования, то уравнения (2.1) эквивалентны соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2s). \tag{2.3}$$

Для доказательства служит следующее, легко проверяемое тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \sum \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_l} \frac{\partial q_k}{\partial t}. \tag{2.4}$$