Если функция F не зависит явно от t, то уравнения (1.7) имеют интеграл

$$F = \text{const}. \tag{1.8}$$

В том случае, когда рассматривается склерономная система, т. е. такая, в которой связи либо вовсе отсутствуют, либо не зависят от времени, интеграл (1.8) есть интеграл энергии. В самом деле, на основании (1.6), (1.3) и (1.2) его можно написать так:

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const}.$$

Но для склерономной системы T есть однородная функция второго порядка от $\dot{q}_k$, так как два последних члена в выражении (1.4) равны нулю. Поэтому стоящая здесь сумма равна $2T$, и рассматриваемый интеграл принимает, учитывая (1.2), такой вид:

$$T - U = \text{const},$$

а это есть не что иное, как закон сохранения энергии.

§ 2. Лемма Пуанкаре

Канонические уравнения обладают многими весьма замечательными и весьма важными для динамики свойствами. Те свойства этих уравнений, которые нам понадобятся в дальнейшем, очень просто выводятся, как показал Пуанкаре [1905], из следующего предложения.

Лемма Пуанкаре. Если общее решение канонической системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{2.1}$$

дается формулами

$$q_k = q_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s}), \quad p_k = p_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2s}), \tag{2.2}$$

где через $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2s}$ обозначены постоянные интегрирования, то уравнения (2.1) эквивалентны соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2s). \tag{2.3}$$

Для доказательства служит следующее, легко проверяемое тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \sum \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_l} \frac{\partial q_k}{\partial t}. \tag{2.4}$$

Равенства (2.4) и (2.1) дают

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial\gamma_i}-\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial t}=-\sum\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial\gamma_i}-\sum\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial\gamma_i}. \quad (2.5)$$

Это показывает, что соотношения (2.3) действительно являются следствиями уравнений (2.1).

Чтобы показать, что уравнения (2.1) в свою очередь вытекают из соотношений (2.3), представим эти последние в форме (2.5) и воспользуемся тождеством (2.4). Получим

$$\sum\left(\frac{\partial p_k}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial\gamma_i}-\sum\left(\frac{\partial q_k}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial\gamma_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2s).$$

Эти равенства мы можем рассматривать как систему $2s$ линейных однородных уравнений относительно величин

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q_k}\right); \quad -\left(\frac{\partial q_k}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial p_k}\right). \quad (2.6)$$

Так как определитель этой системы не равен нулю (иначе функции (2.2) не были бы общим решением), то все величины (2.6) должны быть равны нулю, а это дает уравнения (2.1).

Примечание. Канонические уравнения (2.1) не меняются, если p_k и q_k поменять местами, а t заменить через $-t$. Поэтому соотношения (2.3) в лемме Пуанкаре можно заменить такими:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum q_k\frac{\partial p_k}{\partial\gamma_i}-\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\sum q_k\frac{\partial p_k}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial\gamma_i}. \quad (2.7)$$

§ 3. Канонические преобразования

В канонических уравнениях

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (3.1)$$

заменим переменные q_k, p_k новыми переменными, Q_k, P_k, определяемыми равенствами

$$\left.\begin{aligned} Q_k&=Q_k(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_s,\ p_1,\ \ldots,\ p_s),\\ P_k&=P_k(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_s,\ p_1,\ \ldots,\ p_s).\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

Если уравнения, полученные после такой замены, могут быть представлены в каноническом виде:

$$\frac{dQ_k}{dt}=\frac{\partial K}{\partial P_k}; \quad \frac{dP_k}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (3.3)$$

то преобразование (3.2) называется каноническим.