Равенства (2.4) и (2.1) дают

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = -\sum \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i}. \qquad (2.5)$$

Это показывает, что соотношения (2.3) действительно являются следствиями уравнений (2.1).

Чтобы показать, что уравнения (2.1) в свою очередь вытекают из соотношений (2.3), представим эти последние в форме (2.5) и воспользуемся тождеством (2.4). Получим

$$\sum\left(\frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum\left(\frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\right)\frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2s).$$

Эти равенства мы можем рассматривать как систему $2s$ линейных однородных уравнений относительно величин

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_k}\right); \qquad -\left(\frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\right). \qquad (2.6)$$

Так как определитель этой системы не равен нулю (иначе функции (2.2) не были бы общим решением), то все величины (2.6) должны быть равны нулю, а это дает уравнения (2.1).

Примечание. Канонические уравнения (2.1) не меняются, если p_k и q_k поменять местами, а t заменить через $-t$. Поэтому соотношения (2.3) в лемме Пуанкаре можно заменить такими:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum q_k \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\sum q_k \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_i}. \qquad (2.7)$$

§ 3. Канонические преобразования

В канонических уравнениях

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \qquad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \qquad (3.1)$$

заменим переменные q_k, p_k новыми переменными, Q_k, P_k, определяемыми равенствами

$$\left.\begin{aligned} Q_k &= Q_k(t, q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s), \\ P_k &= P_k(t, q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s). \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Если уравнения, полученные после такой замены, могут быть представлены в каноническом виде:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}; \qquad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \qquad (3.3)$$

то преобразование (3.2) называется каноническим.

Не останавливаясь на различных формах, в которых могут быть представлены необходимые и достаточные условия каноничности преобразования [Шази, 1953], укажем лишь следующее достаточное условие, имеющее особенно широкое применение.

Теорема. Если зависимости (3.2) между старыми и новыми переменными таковы, что выражение

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = d'W \tag{3.4}$$

есть дифференциал некоторой функции W по всем переменным кроме времени, то преобразование (3.2) каноническое. Оно преобразует уравнения (3.1) в уравнения (3.3), в которых

$$K = F + \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{3.5}$$

где F и W выражены через новые переменные Q_k, P_k.

Заметим, прежде всего, что в соотношении (3.4), в котором p_k, q_k предполагаются выраженными через новые переменные P_k, Q_k, дифференциал функции

$$W = W(t, Q_k, P_k)$$

берется только по этим переменным, так что полный дифференциал этой функции равен

$$dW = d'W + \frac{\partial W}{\partial t} dt.$$

Таким образом, соотношение (3.4) можно написать в следующем виде:

$$\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} - \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{dW}{dt} - \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{3.6}$$

С другой стороны, если при помощи соотношений (3.2) и (2.2) функцию W представить в форме

$$W - W(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2s}),$$

то (3.4) даст

$$\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_l} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_l}. \tag{3.7}$$

Продифференцировав равенство (3.6) по γ_l, а равенство (3.7) по t, и заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_l}\left(\frac{dW}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_l}\right),$$

получим, произведя почленное вычитание,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

Отсюда на основании (2.3) и (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l}\sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial \gamma_l} - \frac{\partial}{\partial \gamma_l}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) = -\frac{\partial K}{\partial \gamma_l}.$$

Применив еще раз лемму Пуанкаре, убедимся, что новые переменные удовлетворяют уравнениям (3.3). Теорема доказана.

Условия этой теоремы можно выразить иначе. Сложим почленно равенство (3.4) с тождеством

$$\sum Q_k dP_k + \sum P_k dQ_k = \sum d(P_k Q_k).$$

Это даст

$$\sum p_k dq_k + \sum Q_k dP_k = d'S, \tag{3.8}$$

где

$$S = F + \sum P_k Q_k,$$

а через d' обозначен, как обычно, полный дифференциал, взятый по всем переменным, кроме времени, входящего явно.

Таким образом, взяв любую функцию

$$S(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_s,\ P_1,\ \ldots,\ P_s),$$

мы получим при помощи равенств

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \qquad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \tag{3.9}$$

эквивалентных (3.8), каноническое преобразование.

Пример 1. Покажем, что преобразование, даваемое соотношениями

$$q_1 = \sqrt{2Q_1}\cos P_1; \quad p_1 = \sqrt{2Q_1}\sin P_1,$$
$$q_i = Q_i; \quad p_i = P_i \qquad (i = 2,\ 3,\ \ldots,\ s)$$

является каноиическим.

Так как

$$q_1\,dp_1 = 2Q_1\cos^2 P_1\,dP_1 + \cos P_1 \sin P_1\,dQ_1,$$

то

$$q_1\,dp_1 - Q_1\,dP_1 = Q_1\cos 2P_1\,dP_1 + \\ + \frac{1}{2}\sin 2P_1\,dQ_1 = d\left(\frac{1}{2}Q_1\sin 2P_1\right).$$

Таким образом, условия теоремы здесь выполняются. Новые переменные удовлетворяют уравнениям (3.3), в которых $K = F$.

Пример 2. Часто встречается случай, когда P_k являются линейными функциями p_k, а Q_k — линейными функциями q_k. Здесь условие каноничности преобразования может быть выражено равенством

$$\sum p_k q_k - \sum P_k Q_k = 0.$$

В самом деле, из этого равенства непосредственно вытекает

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = 0,$$

так как dq_k связаны с dQ_k такими же соотношениями, как q_k с Q_k.

§ 4. Решение канонических систем

Рассмотрим каноническую систему

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}. \tag{4.1}$$

Введя новые переменные Q_k, P_k, удовлетворяющие условию каноничности

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = d'W, \tag{4.2}$$

получим, на основании только что доказанной теоремы, систему

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \tag{4.3}$$

гамильтониан которой дается выражением

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + F(t, q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s). \tag{4.4}$$

Система (4.1) будет решена, если нам удастся найти такую функцию W, для которой $K=0$. В самом деле, уравнения (4.3) в этом случае дают

$$Q_k = \alpha_k, \quad P_k = -\beta_k,$$

где α_k и β_k — постоянные интегрирования. С другой стороны, соотношение (4.2) дает

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q_k},$$

причем мы можем считать, что функция W выражена, при помощи соотношений (3.2), через q_k и Q_k.

Заменив в W величины Q_k через α_k, мы получим функцию

$$W(t, q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s), \tag{4.5}$$

удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k. \tag{4.6}$$

Эти соотношения, позволяющие выразить q_k и p_k через t и $2s$ произвольных постоянных α_k и β_k, дают общее решение системы (4.1).