В самом деле, из этого равенства непосредственно вытекает

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = 0,$$

так как dq_k связаны с dQ_k такими же соотношениями, как q_k с Q_k.

§ 4. Решение канонических систем

Рассмотрим каноническую систему

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}. \tag{4.1}$$

Введя новые переменные Q_k, P_k, удовлетворяющие условию каноничности

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = d'W, \tag{4.2}$$

получим, на основании только что доказанной теоремы, систему

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \tag{4.3}$$

гамильтониан которой дается выражением

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + F(t, q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s). \tag{4.4}$$

Система (4.1) будет решена, если нам удастся найти такую функцию W, для которой $K=0$. В самом деле, уравнения (4.3) в этом случае дают

$$Q_k = \alpha_k, \quad P_k = -\beta_k,$$

где α_k и β_k — постоянные интегрирования. С другой стороны, соотношение (4.2) дает

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q_k},$$

причем мы можем считать, что функция W выражена, при помощи соотношений (3.2), через q_k и Q_k.

Заменив в W величины Q_k через α_k, мы получим функцию

$$W(t, q_1, \ldots, q_s, \alpha_1, \ldots, \alpha_s), \tag{4.5}$$

удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k; \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k. \tag{4.6}$$

Эти соотношения, позволяющие выразить q_k и p_k через t и $2s$ произвольных постоянных α_k и β_k, дают общее решение системы (4.1).

Итак, задача действительно приводится к нахождению функции W, удовлетворяющей уравнению $K=0$, которое, на основании (4.4) и (4.6), имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t}+F\left(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_s,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_s}\right)=0, \tag{4.7}$$

т. е. является уравнением в частных производных первого порядка с $s+1$ независимыми переменными $t,\ q_1,\ \ldots,\ q_s$.

Как известно, такое уравнение имеет всегда бесчисленное множество полных интегралов W, заключающих, помимо независимых переменных $t,\ q_1,\ \ldots,\ q_s$, еще $s+1$ независимых между собою произвольных постоянных.

В рассматриваемом случае неизвестная функция W входит в уравнение (4.7) только в форме своих производных. Поэтому одна из произвольных постоянных, входящих в полный интеграл, будет аддитивной. Отбросив ее, получим функцию вида (4.5), где ни одна из постоянных α_k не может быть аддитивной.

Мы приходим, таким образом, к следующему результату, найденному Гамильтоном в 1834—1835 гг. и вскоре получившему окончательную форму в работах Якоби:

Теорема Якоби. Для решения канонической системы (4.1) достаточно найти один из полных интегралов W уравнения (4.7), содержащий неаддитивные произвольные постоянные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$ $\ldots,\ \alpha_s$.

Общее решение системы (4.1) будет даваться уравнениями (4.6), содержащими еще s произвольных постоянных $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_s$.

Применение этой теоремы к решению канонических систем носит название метода Якоби, а уравнение (4.7) обычно называется уравнением Гамильтона — Якоби.

Постоянные α_k, β_k, вводимые методом Якоби, носят название канонических постоянных или канонических элементов.

Примечание. Для консервативной канонической системы, у которой гамильтониан не зависит явно от времени, имеет место интеграл энергии (1.8).

В этом случае нахождение полного интеграла уравнения (4.7) упрощается. Полагая

$$W=-\alpha_1 t+W', \tag{4.8}$$

где α_1 — произвольная постоянная, для нахождения W' получим уравнение

$$F\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_s,\ \frac{\partial W'}{\partial q_1},\ \frac{\partial W'}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial W'}{\partial q_s}\right)=\alpha_1.$$

Достаточно найти решение этого уравнения, содержащее еще $s-1$ произвольных постоянных $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_s$, чтобы иметь функцию (4.8), дающую общее решение (4.6) канонической системы. В рассматриваемом случае это общее решение будет представлено уравнениями

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1; \quad \frac{\partial W'}{\partial q_1} = p_1; \quad \frac{\partial W'}{\partial \alpha_h} = \beta_h; \quad \frac{\partial W'}{\partial q_h} = p_h \quad (h = 2, 3, \ldots, s). \tag{4.9}$$

Точно так же, если среди координат q_k имеются циклические q_λ, q_μ, ..., т. е. такие, что соответствующие им импульсы p_λ, p_μ, ... отсутствуют в гамильтониане, то система (4.1) будет иметь интегралы

$$q_\lambda = \text{const}, \quad q_\mu = \text{const}, \ldots$$

Подстановка, аналогичная (4.8), позволит внести упрощение в нахождение функции W.

§ 5. Метод вариации произвольных постоянных в случае канонических элементов

Рассмотрим решение канонической системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial (F - R)}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial (F - R)}{\partial q_k}, \tag{5.1}$$

где F и R — функции t, q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s.

Предположим, что применение метода Якоби позволило получить решение упрощенной, получающейся при $R = 0$, системы

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} \tag{5.2}$$

в форме уравнений

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad \beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}, \tag{5.3}$$

дающих

$$\left.\begin{aligned} q_k &= q_k(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s), \\ p_k &= p_k(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s), \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

где α_k, β_k — постоянные величины.

Для решения более сложной системы (5.1) методом вариации произвольных постоянных надо использовать соотношения (5.4) для замены переменных q_k, p_k новыми переменными α_k, β_k.

Легко видеть, что

$$\sum p_k\, dq_k - \sum \alpha_k\, d\beta_k = \sum p_k\, dq_k + \sum \beta_k\, d\alpha_k - \sum d(\alpha_k \beta_k) =$$
$$= \sum \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} d\alpha_k - \sum d(\alpha_k \beta_k) = d\left(W - \sum \alpha_k \beta_k\right),$$