системы. В рассматриваемом случае это общее решение будет представлено уравнениями

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha_1}=t+\beta_1;\quad \frac{\partial W'}{\partial q_1}=p_1;\quad \frac{\partial W'}{\partial \alpha_h}=\beta_h;\quad \frac{\partial W'}{\partial q_h}=p_h \qquad (4.9)$$
$$(h=2,\ 3,\ \ldots,\ s).$$

Точно так же, если среди координат q_k имеются циклические q_λ, q_μ, ..., т. е. такие, что соответствующие им импульсы p_λ, p_μ, ... отсутствуют в гамильтониане, то система (4.1) будет иметь интегралы

$$q_\lambda=\text{const},\quad q_\mu=\text{const},\ \ldots$$

Подстановка, аналогичная (4.8), позволит внести упрощение в нахождение функции W.

§ 5. Метод вариации произвольных постоянных в случае канонических элементов

Рассмотрим решение канонической системы

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial (F-R)}{\partial p_k};\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial (F-R)}{\partial q_k}, \qquad (5.1)$$

где F и R — функции t, q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s.

Предположим, что применение метода Якоби позволило получить решение упрощенной, получающейся при $R=0$, системы

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_k};\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q_k} \qquad (5.2)$$

в форме уравнений

$$p_k=\frac{\partial W}{\partial q_k},\quad \beta_k=\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}, \qquad (5.3)$$

дающих

$$\left.\begin{aligned} q_k&=q_k(t,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_s),\\ p_k&=p_k(t,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_s),\end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

где α_k, β_k — постоянные величины.

Для решения более сложной системы (5.1) методом вариации произвольных постоянных надо использовать соотношения (5.4) для замены переменных q_k, p_k новыми переменными α_k, β_k.

Легко видеть, что

$$\sum p_k\,dq_k-\sum \alpha_k\,d\beta_k=\sum p_k\,dq_k+\sum \beta_k\,d\alpha_k-\sum d(\alpha_k\beta_k)=$$
$$=\sum \frac{\partial W}{\partial q_k}dq_k+\sum \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}d\alpha_k-\sum d(\alpha_k\beta_k)=d\Big(W-\sum \alpha_k\beta_k\Big),$$

а потому условие каноничности преобразования здесь удовлетворяется, и мы сразу можем написать преобразованные уравнения (§ 3). Так как в рассматриваемом случае

$$K = F - R + \frac{\partial W}{\partial t} = -R,$$

то уравнения, дающие новые переменные, таковы:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}; \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}. \tag{5.5}$$

Решив эту систему и подставив полученные значения α_k, β_k в формулы (5.4), будем иметь решение уравнений (5.1).

Таким образом, применение метода вариации произвольных постоянных отличается исключительной простотой в том случае, когда используются канонические постоянные.

§ 6. Канонические элементы эллиптического движения

Чтобы получить канонические элементы эллиптического движения, нужно уравнения движения в задаче двух тел привести к канонической форме и решить их методом Якоби.

Уравнения невозмущенного движения планеты в гелиоцентрической прямоугольной системе координат имеют вид

$$\ddot{x} = \partial U/\partial x; \quad \ddot{y} = \partial U/\partial y; \quad \ddot{z} = \partial U/\partial z,$$

где

$$U = k^2 (1 + m) r^{-1} = k_1^2 r^{-1}.$$

Чтобы привести эти уравнения к каноническому виду, можно было бы взять гамильтониан

$$F = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U$$

и считать $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ переменными, сопряженными с x, y, z. Удобнее, однако, пользоваться полярной системой координат, определяемой соотношениями

$$x = r \cos\varphi \cos\theta, \qquad y = r \cos\varphi \sin\theta, \qquad z = r \sin\varphi.$$

Функция F в этом случае имеет вид

$$F = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2\varphi \cdot \dot{\theta}^2) - k_1^2 r^{-1}.$$

Чтобы получить уравнения в канонической форме, надо (см. § 1) ввести сопряженные с r, φ, θ величины

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}.$$