а потому условие каноничности преобразования здесь удовлетворяется, и мы сразу можем написать преобразованные уравнения (§ 3). Так как в рассматриваемом случае

$$K = F - R + \frac{\partial W}{\partial t} = -R,$$

то уравнения, дающие новые переменные, таковы:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}; \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}. \tag{5.5}$$

Решив эту систему и подставив полученные значения α_k, β_k в формулы (5.4), будем иметь решение уравнений (5.1).

Таким образом, применение метода вариации произвольных постоянных отличается исключительной простотой в том случае, когда используются канонические постоянные.

§ 6. Канонические элементы эллиптического движения

Чтобы получить канонические элементы эллиптического движения, нужно уравнения движения в задаче двух тел привести к канонической форме и решить их методом Якоби.

Уравнения невозмущенного движения планеты в гелиоцентрической прямоугольной системе координат имеют вид

$$\ddot{x} = \partial U/\partial x; \quad \ddot{y} = \partial U/\partial y; \quad \ddot{z} = \partial U/\partial z,$$

где

$$U = k^2(1+m)r^{-1} = k_1^2 r^{-1}.$$

Чтобы привести эти уравнения к каноническому виду, можно было бы взять гамильтониан

$$F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U$$

и считать $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ переменными, сопряженными с x, y, z. Удобнее, однако, пользоваться полярной системой координат, определяемой соотношениями

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\cos\varphi\sin\theta, \quad z = r\sin\varphi.$$

Функция F в этом случае имеет вид

$$F = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\theta}^2) - k_1^2 r^{-1}.$$

Чтобы получить уравнения в канонической форме, надо (см. § 1) ввести сопряженные с r, φ, θ величины

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}.$$

Учитывая, что $L = T + U$, находим

$$p_1 = \dot{r}, \quad p_2 = r^2\dot{\varphi}, \quad p_3 = r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\theta},$$

и потому

$$F = \frac{1}{2}(p_1^2 + r^{-2}p_2^2 + r^{-2}\sec^2\varphi \cdot p_3^2) - k_1^2 r^{-1}.$$

Следовательно, уравнение Гамильтона — Якоби имеет здесь такой вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + r^{-2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + r^{-2}\sec^2\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right\} - k_1^2 r^{-1} = 0. \quad (6.1)$$

Это уравнение не содержит явно ни t, ни θ, поэтому мы можем положить (§ 4):

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2\theta + W_1.$$

Подстановка этого выражеиия в (6.1) дает

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + r^{-2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 + r^{-2}\sec^2\varphi \cdot \alpha_2^2 = 2k_1^2 r^{-1} - 2\alpha_1$$

Нам достаточно найти какое-либо решение этого уравнения, заключающее еще одну постоянную α_3. Сообразно с этим положим

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \alpha_2^2\sec^2\varphi = \alpha_3^2,$$

что дает

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \alpha_3^2 r^{-2} = 2k_1^2 r^{-1} - 2\alpha_1.$$

вследствие чего переменные r и φ оказываются разделенными. Решая два последних уравнения и складывая результаты, окончательно будем иметь

$$W = \alpha_1 t + \alpha_2\theta + \int_0^{\varphi}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2\sec^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi + \\ + \int_{r_0}^{r}(-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{\frac{1}{2}}\,dr.$$

Нижние пределы интегралов могут быть выбраны произвольно.

Общее решение задачи дается равенствами

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \quad \beta_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3}, \quad (6.2)$$

позволяющими выразить координаты в функции t и шести канонических элементов α_k, β_k.

Так как выражения координат через обычные кеплеровы элементы нам уже известны, то достаточно найти зависимости, существующие между каноническими и кеплеровыми элементами.

Первое из соотношений (6.2) имеет вид

$$\beta_1 = t - \int_{r_0}^{r} \left(-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr.$$

В случае эллиптического движения радиус-вектор заключен в интервале

$$a(1-e) \leqslant r \leqslant a(1+e).$$

С другой стороны, для вещественности β_1 необходимо, чтобы r заключалось в интервале

$$r_0 \leqslant r \leqslant r_1,$$

где через r_0 и r_1 обозначены корни уравнения

$$2\alpha_1 r^2 - 2k_1^2 r + \alpha_3^2 = 0.$$

Так как эти интервалы должны совпадать, то

$$2a = r_0 + r_1 = \frac{k_1^2}{\alpha_1}, \quad a^2(1-e^2) = r_0 r_1 = \frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1},$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{k_1^2}{2a}, \quad \alpha_3 = k_1\sqrt{a(1-e^2)} = k_1\sqrt{p}.$$

В момент прохождения через перигелий $r = r_0$, поэтому

$$\beta_1 = T.$$

Второе из соотношений (6.2) дает

$$\beta_2 = \theta - \alpha_2 \int_0^{\varphi} \sec^2\varphi \left(\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Если $\varphi = 0$, то планета находится в одном из узлов своей орбиты. Поэтому

$$\beta_2 = \Omega.$$

Так как интеграл в последнем равенстве должен быть вещественным, то

$$\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2\varphi \geqslant 0.$$

Но это неравенство должно быть эквивалентно такому: $|\varphi| \leqslant i$. Следовательно,

$$\alpha_2 = \alpha_3 \cos i = k_1\sqrt{p}\cos i.$$

Обратимся, наконец, к последнему из соотношений (6.2), которое имеет вид

$$\beta_3 = \alpha_3 \int\limits_0^{\varphi} (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi - \alpha_3 \int\limits_{r_0}^{r} r^{-2}(-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Вместо широты φ введем аргумент широты u. Так как

$$\sin\varphi = \sin i \sin u,$$

то

$$\alpha_3 \int\limits_0^{\varphi} (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{u} (\cos^2\varphi - \cos^2 i)^{-\frac{1}{2}} \sin i \cos u \, du = \int\limits_0^{u} du = u$$

Следовательно,

$$u - \beta_3 = \alpha_3 \int\limits_{r_0}^{r} r^{-2}(-2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Для момента прохождения через перигелий, когда $r = r_0$, $u = \omega$, это соотношение дает

$$\beta_3 = \omega = \pi - \Omega.$$

Собрав вместе полученные результаты, будем иметь следующие выражения канонических элементов через кеплеровы:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= k_1^2/2a; & \beta_1 &= T, \\ \alpha_2 &= k_1 \sqrt{p} \cos i; & \beta_2 &= \Omega, \\ \alpha_3 &= k_1 \sqrt{p}; & \beta_3 &= \pi - \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Вместо элемента T введем ε — среднюю долготу (в орбите) для момента $t=0$. Так как среднюю долготу для момента t мы можем представить двояко:

$$\lambda = \varepsilon + nt; \quad \lambda = \pi + n(t - T), \tag{6.4}$$

то

$$\beta_1 = T = (\pi - \varepsilon) n^{-1} = (\pi - \varepsilon) k_1^{-1} a^{3/2}. \tag{6.5}$$

Для обратного перехода от канонических элементов к кеплеровым служат формулы

$$\left.\begin{aligned} a &= k_1^2/2\alpha_1; & \Omega &= \beta_2, \\ e^2 &= 1 - 2\alpha_1\alpha_3^2/k_1^4; & \pi &= \beta_2 + \beta_3, \\ \cos i &= \alpha_2/\alpha_3; & \varepsilon &= \beta_2 + \beta_3 - k_1^{-2}(2\alpha_1)^{3/2}\beta_1. \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

Канонические элементы, определяемые равенствами (6.3), будем называть каноническими элементами Якоби. Они были введены в его «Лекциях по динамике», прочитанных в 1842 г. и опубликованных в 1866 г.

§ 7. Новый вывод уравнений Лагранжа

В случае невозмущенного движения канонические элементы являются постоянными. При изучении возмущенного движения они являются функциями времени, определяемыми уравнениями:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}; \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{7.1}$$

где через R обозначена пертурбационная функция (§ 5).

От этих уравнений легко перейти к уравнениям Лагранжа, дающим изменения кеплеровых элементов. Дифференцируя равенства (6.6) и учитывая (7.1), получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{k_1^2}\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{2}{n^2 a}\frac{\partial R}{\partial \beta_1},$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \beta_3},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\cos i\,\frac{\partial R}{\partial \beta_3} - \frac{\partial R}{\partial \beta_2}\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2},$$

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_3},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} + n\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + 3\frac{\varepsilon - \pi}{n^2a^2}\frac{\partial R}{\partial \beta_1}.$$

Входящие сюда производные пертурбационной функции по каноническим элементам легко выражаются через ее производные по кеплеровым элементам при помощи соотношений (6.3) и (6.5). Легко видеть, что

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -n\frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_2} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_3} = \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -\frac{2}{n^2a}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{3}{n^2a^2}(\varepsilon - \pi)\frac{\partial R}{\partial \varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}; \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$