Канонические элементы, определяемые равенствами (6.3), будем называть каноническими элементами Якоби. Они были введены в его «Лекциях по динамике», прочитанных в 1842 г. и опубликованных в 1866 г.

§ 7. Новый вывод уравнений Лагранжа

В случае невозмущенного движения канонические элементы являются постоянными. При изучении возмущенного движения они являются функциями времени, определяемыми уравнениями:

$$\frac{d\alpha_k}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\beta_k};\quad \frac{d\beta_k}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_k}\qquad (k=1,\ 2,\ 3), \tag{7.1}$$

где через R обозначена пертурбационная функция (§ 5).

От этих уравнений легко перейти к уравнениям Лагранжа, дающим изменения кеплеровых элементов. Дифференцируя равенства (6.6) и учитывая (7.1), получим:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{2a^2}{k_1^2}\frac{\partial R}{\partial\beta_1}=-\frac{2}{n^2a}\frac{\partial R}{\partial\beta_1},$$

$$\frac{de}{dt}=-\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial\beta_1}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\beta_3},$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\cos i\frac{\partial R}{\partial\beta_3}-\frac{\partial R}{\partial\beta_2}\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2},$$

$$\frac{d\pi}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3}+n\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}+3\frac{\varepsilon-\pi}{n^2a^2}\frac{\partial R}{\partial\beta_1}.$$

Входящие сюда производные пертурбационной функции по каноническим элементам легко выражаются через ее производные по кеплеровым элементам при помощи соотношений (6.3) и (6.5). Легко видеть, что

$$\frac{\partial R}{\partial\beta_1}=-n\frac{\partial R}{\partial\varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial\beta_2}=\frac{\partial R}{\partial\Omega}+\frac{\partial R}{\partial\pi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial\beta_3}=\frac{\partial R}{\partial\pi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}=-\frac{2}{n^2a}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{3}{n^2a^2}(\varepsilon-\pi)\frac{\partial R}{\partial\varepsilon};$$

$$\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}=-\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i};\quad \frac{\partial R}{\partial\alpha_3}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}+\frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$

Подстановка этих выражений в предыдущие равенства дает уравнения Лагранжа, уже выведенные нами другим путем (§ 8 гл. XVI). Не повторяя здесь эти уравнения, ограничимся лишь некоторыми замечаниями относительно последнего из них, имеющего вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}. \tag{7.2}$$

Вывод этого уравнения основан на соотношении (6.4), т. е.

$$\lambda=\varepsilon+nt, \tag{7.3}$$

которое и должно быть употребляемо, когда ε найдено при помощи уравнения (7.2).

Производная $\partial R/\partial a$, входящая в уравнение (7.2), представляет ту особенность по сравнению с производными по другим элементам, что ее приходится брать как по a, входящему явно в координаты планеты, так и по a, входящему в них через посредство средней долготы λ. Таким образом,

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)+\frac{\partial R}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial a}=\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\frac{dn}{da}t,$$

где скобками отмечена производная, взятая по a, фигурирующему в R явно.

Подставив это выражение в (7.2) и учтя, что

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=-t\frac{dn}{dt}-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Чтобы избежать в правой части уравнения члена, имеющего множителем t, вместо ε введем элемент (ε), определяемый равенством

$$\frac{d(\varepsilon)}{dt}=\frac{d\varepsilon}{dt}+t\frac{dn}{dt} \tag{7.4}$$

и условием $(\varepsilon)=0$ при $t=0$.

Это дает

$$\frac{d(\varepsilon)}{dt}=-\frac{2}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{1}{na^2}\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial e}. \tag{7.5}$$

С другой стороны, из (7.4) следует

$$(\varepsilon)=\varepsilon+\int_0^t t\frac{dn}{dt}dt=\varepsilon+nt-\int_0^t n\,dt,$$

откуда

$$\lambda=\varepsilon+nt=(\varepsilon)+\int_0^t n\,dt. \qquad (7.6)$$

Так как на практике всегда употребляются формула (7.6) и уравнение (7.5), то скобки, отмечающие новый элемент (ε) и парциальную производную $(\partial R/\partial a)$, могут быть опущены.

§ 8. Канонические элементы Делоне и Пуанкаре

Недостаток первоначальных кеплеровых элементов, указанный в предыдущем параграфе, присущ и каноническим элементам Якоби. Элемент α_1 входит в пертурбационную функцию R как через посредство a, фигурирующего явно, так и через посредство средней долготы λ. Поэтому в правой части уравнения

$$\frac{d\beta_1}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_1} \qquad (8.1)$$

появляется член, имеющий множителем t.

Если этот недостаток устранить заменой элемента ε элементом (ε), как это было сделано для кеплеровых элементов, то теряется каноническая форма уравнения (8.1).

Тут необходима замена сразу двух элементов, α_1 и β_1.

Делоне предложил ввести вместо этих элементов такие:

$$L=k_1\sqrt{a}=k_1^2(2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$l=n(t-T)=k_1a^{-\frac{3}{2}}(t-\beta_1)=k_1^{-2}(2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}(t-\beta_1).$$

Легко видеть, что

$$\beta_1\,d\alpha_1-l\,dL=t\,d\alpha_1=d'(t\alpha_1).$$

Поэтому при переходе от элементов α_k, β_k к элементам

$$L,\ H=\alpha_2,\ G=\alpha_3;\ l,\ h=\beta_2,\ g=\beta_3$$

каноничность уравнений сохраняется (§ 3).

Новые элементы удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\frac{\partial R'}{\partial l}; & \frac{dG}{dt}&=\frac{\partial R'}{\partial g}; & \frac{dH}{dt}&=\frac{\partial R'}{\partial h};\\ \frac{dl}{dt}&=-\frac{\partial R'}{\partial L}; & \frac{dg}{dt}&=-\frac{\partial R'}{\partial G}; & \frac{dh}{dt}&=-\frac{\partial R'}{\partial H},\end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$