С другой стороны, из (7.4) следует

$$(\varepsilon)=\varepsilon+\int_0^t t\frac{dn}{dt}dt=\varepsilon+nt-\int_0^t n\,dt,$$

откуда

$$\lambda=\varepsilon+nt=(\varepsilon)+\int_0^t n\,dt. \tag{7.6}$$

Так как на практике всегда употребляются формула (7.6) и уравнение (7.5), то скобки, отмечающие новый элемент (ε) и парциальную производную ($\partial R/\partial a$), могут быть опущены.

§ 8. Канонические элементы Делоне и Пуанкаре

Недостаток первоначальных кеплеровых элементов, указанный в предыдущем параграфе, присущ и каноническим элементам Якоби. Элемент α_1 входит в пертурбационную функцию R как через посредство a, фигурирующего явно, так и через посредство средней долготы λ. Поэтому в правой части уравнения

$$\frac{d\beta_1}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_1} \tag{8.1}$$

появляется член, имеющий множителем t.

Если этот недостаток устранить заменой элемента ε элементом (ε), как это было сделано для кеплеровых элементов, то теряется каноническая форма уравнения (8.1).

Тут необходима замена сразу двух элементов, α_1 и β_1.

Делоне предложил ввести вместо этих элементов такие:

$$L=k_1\sqrt{a}=k_1^2(2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$l=n(t-T)=k_1a^{-\frac{3}{2}}(t-\beta_1)=k_1^{-2}(2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}(t-\beta_1).$$

Легко видеть, что

$$\beta_1\,d\alpha_1-l\,dL=t\,d\alpha_1=d'(t\alpha_1).$$

Поэтому при переходе от элементов α_k, β_k к элементам

$$L,\ H=\alpha_2,\ G=\alpha_3;\ l,\ h=\beta_2,\ g=\beta_3$$

каноничность уравнений сохраняется (§ 3).

Новые элементы удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial l}; && \frac{dG}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial g}; && \frac{dH}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial h};\\ &\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial L}; && \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial G}; && \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial H},\end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где

$$R' = R + \alpha_1 = R + \frac{k_1^4}{2L^2}.$$

Элементы Делоне выражаются через кеплеровы следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &L = k_1\sqrt{a}; \quad G = k_1\sqrt{a(1-e^2)}; \quad H = k_1\sqrt{a(1-e^2)}\cos i; \\ &l = n(t-T); \quad g = \pi - \Omega; \quad h = \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Таким образом, все три элемента первой группы имеют здесь размерность секторной скорости; все элементы второй группы являются углами, причем за один из этих элементов принята средняя аномалия.

Пуанкаре ввел в употребление еще две системы канонических элементов, в которых за один из элементов принимается средняя долгота и лучше используется малость эксцентриситета и наклона орбиты.

Первая система элементов Пуанкаре определяется равенствами:

$$\left.\begin{aligned} &L = k_1\sqrt{a}; && \lambda = l + \pi = nt + \varepsilon; \\ &\rho_1 = k_1\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right); && \omega_1 = -\pi; \\ &\rho_2 = k_1\sqrt{a(1-e^2)}(1-\cos i); && \omega_2 = -\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Чтобы убедиться, что при переходе от элементов (8.3) к элементам (8.4) сохраняется каноническая форма элементов, рассмотрим выражение:

$$l\,dL + g\,dG + h\,dH - \lambda\,dL - \omega_1\,d\rho_1 - \omega_2\,d\rho_2.$$

Так как это выражение равняется

$$l\,dL + g\,dG + h\,dH - (l + g + h)\,dL + (g + h)(dL - dG) + \\ + h(dG - dH) = 0,$$

то условие (3.4) каноничности преобразования здесь выполняется.

Вторая система элементов Пуанкаре дается формулами:

$$\left.\begin{aligned} &L = k_1\sqrt{a}; && \lambda = l + \pi; \\ &\xi_1 = \sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1; && \eta_1 = \sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1; \\ &\xi_2 = \sqrt{2\rho_2}\cos\omega_2; && \eta_2 = \sqrt{2\rho_2}\sin\omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Каноничность этой системы непосредственно вытекает из сказанного в § 3 (пример 1).

В 1913 г. Леви-Чивита и Хилл указали системы канонических элементов, в которых за один из элементов берется эксцентрическая или истинная аномалия. В этом же году Де Ситтер и Андуайе дали общий прием для получения таких систем элементов.

§ 9. Каноническая форма уравнений относительного движения

Рассмотрим относительное движение n материальных точек, имеющих массы $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$.

Обозначим через (x_i, y_i, z_i) якобиевы координаты точки m_i и положим (§ 5, гл. XIV):

$$\left.\begin{aligned} \mu_i = m_i M_{i-1}/M_i, \quad M_i = m_0 + m_1 + \ldots + m_i,\\ U = \frac{k^2}{2}\sum_0^{n-1}\sum_0^{n-1} m_g m_h r_{gh}^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где через r_{gh} обозначено расстояние между точками m_g и m_h, выраженное через якобиевы координаты.

В этом случае уравнения движения напишутся так:

$$\mu_i \ddot{x}_i = \partial U/\partial x_i; \quad \mu_i \ddot{y}_i = \partial U/\partial y_i; \quad \mu_i \ddot{z}_i = \partial U/\partial z_i \tag{9.2}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Эти уравнения могут быть заменены, как мы уже видели, каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$F = T - U = \frac{1}{2}\sum_1^{n-1}\mu_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U,$$

если принять за сопряженные переменные координаты x_i, y_i, z_i и обобщенные импульсы $\mu_i \dot{x}_i$, $\mu_i \dot{y}_i$, $\mu_i \dot{z}_i$.

Рассмотрим случай, когда массы $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ очень малы по сравнению с m_0, так что взаимным притяжением этих масс можно пренебречь. Чтобы получить соответствующие уравнения движения, нужно в выражении (9.1) отбросить все члены, содержащие произведения малых масс, т. е. вместо U взять

$$U_0 = k^2 \sum_1^{n-1} m_0 m_i r_i^{-1},$$

где, если ограничиться первыми степенями малых масс,

$$r_i^2 = r_{0i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$