В 1913 г. Леви-Чивита и Хилл указали системы канонических элементов, в которых за один из элементов берется эксцентрическая или истинная аномалия. В этом же году Де Ситтер и Андуайе дали общий прием для получения таких систем элементов.

§ 9. Каноническая форма уравнений относительного движения

Рассмотрим относительное движение n материальных точек, имеющих массы $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$.

Обозначим через (x_i, y_i, z_i) якобиевы координаты точки m_i и положим (§ 5, гл. XIV):

$$\left.\begin{aligned} \mu_i = m_i M_{i-1}/M_i, \quad M_i = m_0 + m_1 + \ldots + m_i, \\ U = \frac{k^2}{2} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} m_g m_h r_{gh}^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где через r_{gh} обозначено расстояние между точками m_g и m_h, выраженное через якобиевы координаты.

В этом случае уравнения движения напишутся так:

$$\mu_i \ddot{x}_i = \partial U/\partial x_i; \quad \mu_i \ddot{y}_i = \partial U/\partial y_i; \quad \mu_i \ddot{z}_i = \partial U/\partial z_i \tag{9.2}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Эти уравнения могут быть заменены, как мы уже видели, каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$F = T - U = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U,$$

если принять за сопряженные переменные координаты x_i, y_i, z_i и обобщенные импульсы $\mu_i \dot{x}_i, \mu_i \dot{y}_i, \mu_i \dot{z}_i$.

Рассмотрим случай, когда массы $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ очень малы по сравнению с m_0, так что взаимным притяжением этих масс можно пренебречь. Чтобы получить соответствующие уравнения движения, нужно в выражении (9.1) отбросить все члены, содержащие произведения малых масс, т. е. вместо U взять

$$U_0 = k^2 \sum_1^{n-1} m_0 m_i r_i^{-1},$$

где, если ограничиться первыми степенями малых масс,

$$r_i^2 = r_{0i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Система (9.2) распадется на $n-1$ отдельных систем вида

$$\ddot{x}_i + k^2 m_0 M_i M_{i-1}^{-1} x_i r_i^{-3} = 0, \ldots \tag{9.3}$$

Таким образом, координаты точки m_i в невозмущенном движении мы можем получить путем решения задачи двух тел и выразить через время и шесть канонических элементов орбиты. Чтобы получить уравнения возмущенного движения, нужно эти элементы принять за новые переменные и учесть, что для невозмущенного движения гамильтониан равен $T-U_0$, а для возмущенного он равен $T-U$. Отсюда следует, что пертурбационная функция, определяемая равенством

$$F = T - U_0 - R,$$

равна

$$R = U - U_0 = \frac{k^2}{2} \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} m_g m_h r_{gh}^{-1} - \frac{k^2}{2} \sum_1^{n-1} m_0 m_i r_i^{-1}. \tag{9.4}$$

Мы будем пользоваться вторыми элементами Пуанкаре. Элементы L, ξ_1, ξ_2; λ, η_1, η_2 для точки m_i обозначим (чтобы избежать двойных индексов) через

$$L_i, \quad \xi_{2i-1}, \quad \xi_{2i}; \qquad \lambda_i, \quad \eta_{2i-1}, \quad \eta_{2i}.$$

Уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial \lambda_i}; \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial L_i}, \\ &\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial \eta_j}; \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial \xi_j} \\ &(i = 1, 2, \ldots, n-1; \; j = 1, 2, \ldots, 2n-2), \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

где на основании того, что мы видели в предыдущем параграфе, и учитывая форму исходных уравнений (9.3),

$$R' = R + \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} k^4 m_0^2 M_i^2 M_{i-1}^{-2} L_i^{-2}. \tag{9.6}$$

Эти уравнения мы используем для вывода некоторых общих свойств движения планет. Но предварительно нужно пертурбационную функцию R' выразить через канонические элементы планет и разложить в ряд, позволяющий решать уравнения последовательными приближениями, а это в свою очередь требует представления прямоугольных координат каждой планеты в виде явных функций ее канонических элементов.