§ 10. Выражение прямоугольных координат через канонические элементы

Прямоугольные гелиоцентрические координаты планеты выражаются через обычные эллиптические элементы следующими, хорошо известными, формулами:

$$x = r\cos u\cos\Omega - r\sin u\sin\Omega\cos i,$$
$$y = r\cos u\sin\Omega + r\sin u\cos\Omega\cos i,$$
$$z = r\sin u\sin i,$$

где

$$u = v + \pi - \Omega.$$

Положив

$$X = r\cos(v - M), \quad Y = r\sin(v - M), \tag{10.1}$$

где через $M = \lambda - \pi$ обозначена средняя аномалия, легко убедиться, что эти формулы могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda - 2\Omega)\right] - \\ &\qquad - Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda - 2\Omega)\right], \\ y &= X\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda - 2\Omega)\right] + \\ &\qquad + Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda - 2\Omega)\right], \\ z &= X\sin i\sin(\lambda - \Omega) + Y\sin i\cos(\lambda - \Omega). \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Введем в эти выражения вторые элементы Пуанкаре, определяемые на основании (8.4) и (8.5) соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &L = k\sqrt{a}; && \lambda = M + \pi; \\ &\xi_1 = \sqrt{2L}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\pi; && -\eta_1 = \sqrt{2L}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & && \qquad \times \sin\pi; \\ &\xi_2 = \sqrt{2L}\sqrt[4]{1 - e^2}\sqrt{1 - \cos i}\cos\Omega; && -\eta_2 = \sqrt{2L}\sqrt[4]{1 - e^2} \times \\ & && \qquad \times \sqrt{1 - \cos i}\sin\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

В выражениях (10.2) множители при X и Y состоят из произведений $\sin\lambda$ и $\cos\lambda$ на величины

$$\cos^2\frac{i}{2}; \quad \sin^2\frac{i}{2}\,{}^{\cos}_{\sin}\,2\Omega; \quad \sin i\,{}^{\cos}_{\sin}\,\Omega. \tag{10.4}$$

Покажем, что все эти пять величин разлагаются в ряды, расположенные по целым положительным степеням ξ_1, ξ_2, η_1, η_2.

Равенства (10.3) дают

$$\xi_1^2+\eta_1^2=2L\left(1-\sqrt{1-e^2}\right); \quad \xi_2^2+\eta_2^2=4L\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}.$$

Отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\frac{i}{2} &= \frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{4L-2\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)}, \\ \cos^2\frac{i}{2} &= \frac{4L-2\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)-\xi_2^2-\eta_2^2}{4L-2\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

что показывает разложимость этих двух величин в ряды требуемого вида.

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\Omega=-\eta_2/\xi_2,$$

откуда следует, что

$$\sin\Omega=-\eta_2/\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}; \qquad \cos\Omega=\xi_2/\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2};$$

$$\sin 2\Omega=-2\eta_2\xi_2/(\xi_2^2+\eta_2^2); \qquad \cos 2\Omega=(\xi_2^2-\eta_2^2)/(\xi_2^2+\eta_2^2).$$

Заметим еще, что из (10.5) легко получить равенство

$$\sin i=\sqrt{\xi_2^2+\eta_2^2}\,\frac{\left[4L-2\left(\xi_1^2+\eta_1^2\right)-\xi_2^2-\eta_2^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2L-\xi_1^2-\eta_1^2}.$$

Подстановка всех этих выражений в произведения (10.4) делает очевидным справедливость нашего утверждения.

Рассмотрим теперь величины (10.1). Так как

$$r\cos v=a(\cos E-e), \quad r\sin v=a\sqrt{1-e^2}\sin E,$$

то

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a}X &= -e\cos M+\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}\cos(E-M)+ \\ &\qquad +\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2e^2}e^2\cos(E+M), \\ \frac{1}{a}Y &= e\sin M+\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}\sin(E-M)- \\ &\qquad -\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2e^2}e^2\sin(E+M). \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

Покажем, что каждая из величин

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}; & \dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{2}, \\ {\cos \atop \sin}(E-M); & e^2 {\cos \atop \sin}(E+M) \end{array}\right\} \qquad (10.7)$$

разлагается в ряд по целым положительным степеням $e \sin M$ и $e \cos M$.

Для двух первых величин, разлагающихся по степеням e^2, это очевидно.

Заметим далее, что уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M$$

может быть написано в форме

$$E - M - e \sin M \cos(E-M) - e \cos M \sin(E-M) = 0.$$

Положив

$$w = E - M; \quad z_1 = e \sin M; \quad z_2 = e \cos M,$$

будем иметь уравнение

$$f(w, z_1, z_2) = 0, \qquad (10.8)$$

левая часть которого есть голоморфная функция в точке $w = z_1 = z_2 = 0$.

Так как в этой точке производная

$$\partial f / \partial w = 1,$$

т. е. имеет значение, отличное от нуля, то уравнение (10.8) имеет одно и только одно решение, голоморфное в точке $z_1 = z_2 = 0$.

Итак, $w = E - M$ разлагается в ряд по целым положительным степеням z_1 и z_2, сходящийся для достаточно малых значений эксцентриситета. В такие же ряды разлагаются и $\sin(E-M)$, $\cos(E-M)$.

Тождества

$$\left.\begin{aligned} e^2 \cos(E+M) &= e^2 \cos 2M \cos(E-M) - e^2 \sin 2M \sin(E-M), \\ e^2 \sin(E+M) &= e^2 \cos 2M \sin(E-M) + e^2 \sin 2M \cos(E-M), \\ e^2 \cos 2M &= (e \cos M)^2 - (e \sin M)^2, \\ e^2 \sin 2M &= 2(e \sin M)(e \cos M) \end{aligned}\right\} \qquad (10.9)$$

показывают, что и величины (10.7) обладают таким же свойством. Этим заканчивается доказательство разложимости величин (10.7), а следовательно, и величин (10.6), по целым положительным степеням $e \sin M$ и $e \cos M$.

Но

$$e \sin M = e \cos \pi \sin \lambda - e \sin \pi \cos \lambda,$$

$$e \cos M = e \cos \pi \cos \lambda + e \sin \pi \sin \lambda,$$

откуда следует разложимость величин (10.6) в ряды по целым положительным степеням $e \sin \pi$ и $e \cos \pi$, с коэффициентами, выражающимися через $\sin \lambda$ и $\cos \lambda$.

Легко убедиться, что величины $e \sin \pi$ и $e \cos \pi$ разлагаются в свою очередь по целым положительным степеням ξ_1, η_1.

Действительно, формулы (10.3) дают

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 2L\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right),$$

откуда

$$e = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, из этих же формул имеем

$$\frac{e \cos \pi}{\xi_1} = \frac{e \sin \pi}{-\eta_1} = \frac{e}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}.$$

Итак,

$$e \cos \pi = \frac{\xi_1}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$e \sin \pi = \frac{-\eta_1}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{4L}\right]^{\frac{1}{2}},$$

что и доказывает наше утверждение.

Из всего сказанного вытекает, что x, y, z могут быть представлены рядами вида

$$\sum A \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \Psi(\lambda),$$

где A есть некоторая функция L, а через $\Psi(\lambda)$ обозначена 2π-периодическая функция.

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

Теорема. Каждая из прямоугольных координат x, y, z разлагается в ряд вида

$$\sum A \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \cos(k\lambda + H) \tag{10.10}$$

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

в котором H — постоянные числа, а коэффициенты A зависят только от L.

Эти ряды сходятся для достаточно малых значений эксцентриситета.