§ 11. Разложение пертурбационной функции

Рассмотрим пертурбационную функцию R, определяемую равенством (9.4).

Будем всегда считать, что входящие в нее величины r_{gh} и r_i имеют положительную нижнюю границу. Найденные в предыдущем параграфе разложения координат (10.10) показывают, что при этом условии R является функцией элементов

$$\xi_j,\ \eta_j \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,2n-2), \tag{11.1}$$

голоморфной в точке $\xi_j=0$, $\eta_j=0$, каковы бы ни были значения других элементов. С другой стороны, R является 2π-периодической функцией каждой из средних долгот λ_i.

Это приводит к следующему заключению:

Теорема I. Если точки $m_0,\ m_1,\ \ldots,\ m_{n-1}$ движутся таким образом, что все их взаимные расстояния имеют положительную нижнюю границу, то пертурбационная функция R может быть разложена в ряд

$$R=\sum A\mathfrak{M}\cos\left(\sum k_l\lambda_l+H\right), \tag{11.2}$$

где

$$\mathfrak{M}=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ \eta_1^{\beta_1}\eta_2^{\beta_2}\ldots, \tag{11.3}$$

коэффициенты A зависят только от L_i, а через H обозначены постоянные (не зависящие от элементов) величины.

Суммирование ведется по

$$\alpha_j,\ \beta_j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad k_l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$
$$(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2).$$

Ряд (11.2) сходится для достаточно малых значений ξ_j, η_j.

В дальнейшем нам понадобится еще выражение функции R через первые элементы Пуанкаре ρ_j, ω_j, связанные с (11.1) соотношениями (§ 8):

$$\xi_j=\sqrt{2\rho_j}\cos\omega_j;\qquad \eta_j=\sqrt{2\rho_j}\sin\omega_j. \tag{11.4}$$

Докажем следующую теорему:

Теорема II. При тех же условиях, как и в теореме I, функция R может быть разложена в ряд

$$R=\sum A\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\ldots\cos\left(\sum k_l\lambda_l+\sum p_j\omega_j+H\right), \tag{11.5}$$

сходящийся при достаточно малых значениях ρ_j.

Каждое из чисел $2q_j$ принимает значения 0, 1, 2, ..., тогда как k_i и p_j принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$. При этом для каждого члена выполняются условия

$$2q_j\geqslant|p_j|;\quad 2q_j\equiv p_j\,(\mathrm{mod}\,2). \tag{11.6}$$

Коэффициенты A зависят только от L_i, а через H обозначены постоянные числа.

Чтобы получить разложение (11.5), будем преобразовывать каждый член ряда (11.2), последовательно заменяя каждый элемент (11.1) новыми при помощи соотношений (11.4).

Члены ряда (11.2), имеющие вид

$$A\cos\left(\sum k_i\lambda_i + H\right), \tag{11.7}$$

остаются при этом без изменения. Эти члены удовлетворяют, очевидно, условиям (11.6).

Покажем теперь, что всякое выражение

$$\Phi = A\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\ldots\cos\left(\sum k_i\lambda_i + \sum p_j\omega_j + B\right),$$

удовлетворяющее условиям (11.6), после умножения на ξ_h или на η_h дает сумму членов того же вида. Вместо произведений

$$\Phi\xi_h = \Phi\sqrt{2\rho_h}\cos\omega_h \quad \text{и} \quad \Phi\eta_h = \Phi\sqrt{2\rho_h}\cos\left(\omega_h - \frac{\pi}{2}\right)$$

рассмотрим более общее выражение

$$\Phi\sqrt{2\rho_h}\cos(\omega_h + B'),$$

которое, очевидно, равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}A\rho_1^{q_1}\rho_2^{q_2}\ldots\sqrt{\rho_h}\left[\cos\left(\sum k_i\lambda_i + \sum p_j\omega_j + \omega_h + B + B'\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\left(\sum k_i\lambda_i + \sum p_j\omega_j - \omega_h + B - B'\right)\right].$$

Пусть, например, $h=3$. В таком случае $2q_1$, $2q_2$, $2q_4$, ... и p_1, p_2, p_4, ... останутся без изменения, а потому будут удовлетворять условиям (11.6). Показатель $2q_3$ здесь заменяется через $2q_3+1$, а вместо p_3 имеем p_3+1 и p_3-1.

Так как, по условию,

$$2q_3 \geqslant |p_3| \quad \text{и} \quad 2q_3 \equiv p_3 \pmod 2,$$

то

$$2q_3 + 1 \geqslant |p_3 + 1|, \quad 2q_3 + 1 \geqslant |p_3 - 1|,$$
$$2q_3 + 1 \equiv p_3 \pm 1 \pmod 2.$$

Отсюда ясно, что, начав с членов вида (11.7) и переходя последовательно путем умножения на ξ или на η к следующим членам, мы всегда будем получать члены, удовлетворяющие условиям (11.6).

Теорема полностью доказана.

Для наших целей достаточно знать лишь форму разложения пертурбационной функции в случае употребления элементов

Пуанкаре. Получение первых членов такого разложения было детально рассмотрено Шарлье [1902] и Пикаром [1906]. Разложение до членов второго порядка включительно можно найти также в курсе Г. Н. Дубошина [1938].

§ 12. Возмущения канонических элементов

Полученную в предыдущем параграфе форму разложения пертурбационной функции используем при решении уравнений относительного движения планет. В принятых нами обозначениях эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL_i}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial\lambda_i}; \quad \frac{d\lambda_i}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial L_i};\\ &\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial\eta_j}; \quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial\xi_j}\\ &(i=1,2,\ldots,n-1;\quad j=1,2,\ldots,2n-2).\end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Здесь

$$R'=R_0+R,$$

причем, на основании (9.6) и (11.2),

$$R_0=k^4m_0^2\left[\frac{(m_0+m_1)^2}{2m_0^2L_1^2}+\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{2(m_0+m_1)^2L_2^2}+\ldots\right],$$

$$R=\sum A\mathfrak{M}\cos\left(\sum k_i\lambda_i+H\right).$$

Через $\mathfrak{M}$ обозначено произведение целых неотрицательных степеней ξ_j, ξ_j. Коэффициенты A, зависящие только от элементов L_i, обращаются в нуль вместе с малыми массами m_1, m_2, ..., m_{n-1}.

В первом приближении, т. е. при $m_i=0$, уравнения (12.1) дают (нуликами обозначены постоянные значения элементов):

$$L_i=L_i^0,\quad \lambda_i=n_it+\lambda_i^0,\quad \xi_j=\xi_j^0,\quad \eta_j=\eta_j^0, \tag{12.2}$$

где

$$n_i=-\frac{\partial R_0}{\partial L_i^0}=k^4\mu_i^2\left(L_i^0\right)^{-3},$$

причем

$$\mu_1=m_0+m_1;\quad \mu_2=m_0\frac{m_0+m_1+m_2}{m_0+m_1};\ \ldots$$

Для получения второго приближения в правые части уравнений (12.1) надо подставить значения (12.2), найденные в первом приближении.

Так как правые части примут вид

$$\sum B\cos(\nu t+H'), \tag{12.3}$$