Пуанкаре. Получение первых членов такого разложения было детально рассмотрено Шарлье [1902] и Пикаром [1906]. Разложение до членов второго порядка включительно можно найти также в курсе Г. Н. Дубошина [1938].

## § 12. Возмущения канонических элементов

Полученную в предыдущем параграфе форму разложения пертурбационной функции используем при решении уравнений относительного движения планет. В принятых нами обозначениях эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL_l}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial \lambda_l}; \quad \frac{d\lambda_l}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial L_l};\\ &\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial R'}{\partial \eta_j}; \quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R'}{\partial \xi_j}\\ &(l=1,2,\ldots,n-1;\quad j=1,2,\ldots,2n-2).\end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

Здесь

$$R'=R_0+R,$$

причем, на основании (9.6) и (11.2),

$$R_0=k^4m_0^2\left[\frac{(m_0+m_1)^2}{2m_0^2L_1^2}+\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{2(m_0+m_1)^2L_2^2}+\ldots\right],$$

$$R=\sum A\mathfrak{M}\cos\left(\sum k_l\lambda_l+H\right).$$

Через $\mathfrak{M}$ обозначено произведение целых неотрицательных степеней $\xi_j$, $\xi_j$. Коэффициенты $A$, зависящие только от элементов $L_i$, обращаются в нуль вместе с малыми массами $m_1$, $m_2$, ..., $m_{n-1}$.

В первом приближении, т. е. при $m_i=0$, уравнения (12.1) дают (нуликами обозначены постоянные значения элементов):

$$L_l=L_l^0,\quad \lambda_l=n_lt+\lambda_l^0,\quad \xi_j=\xi_j^0,\quad \eta_j=\eta_j^0, \qquad (12.2)$$

где

$$n_l=-\frac{\partial R_0}{\partial L_l^0}=k^4\mu_l^2(L_l^0)^{-3},$$

причем

$$\mu_1=m_0+m_1;\quad \mu_2=m_0\frac{m_0+m_1+m_2}{m_0+m_1};\ \ldots$$

Для получения второго приближения в правые части уравнений (12.1) надо подставить значения (12.2), найденные в первом приближении.

Так как правые части примут вид

$$\sum B\cos(\nu t+H'), \qquad (12.3)$$

где
$$\nu = \sum k_i n_i, \tag{12.4}$$
а через $B$ обозначены постоянные коэффициенты, то интегрирование даст
$$\left.\begin{array}{ll} L_i = L_i^0 + \delta_1 L_i; & \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta_1 \lambda_i; \\ \xi_j = \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j; & \eta_j = \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j. \end{array}\right\} \tag{12.5}$$

Через $\delta_1 L_i, \ldots, \delta_1 \eta_j$ здесь обозначены суммы вида
$$B_0 t + \sum B\nu^{-1} \sin(\nu t + H').$$

Вековые члены $B_0 t$ получаются от интегрирования тех членов ряда (12.3), в которых $\nu = 0$.

Уравнения (12.1) показывают, что в $\delta_1 L_i$ вековые члены отсутствуют. Этот результат эквивалентен, как легко видеть, теореме Лапласа — Лагранжа о неизменности больших полуосей планетных орбит с точностью до первых степеней возмущающих масс.

Подстановка выражений (12.5) в правые части уравнений (12.1) даст возможность получить следующее приближение. Продолжая этот процесс дальше после какого угодно числа приближений, будем иметь
$$\left.\begin{array}{ll} L_i = L_i^0 + \delta L_i; & \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta \lambda_i; \\ \xi_j = \xi_j^0 + \delta \xi_j; & \eta_j = \eta_j^0 + \delta \eta_j, \end{array}\right\} \tag{12.6}$$
причем каждая из величин $\delta L_i, \ldots, \delta\eta_j$ будет представлена рядом вида
$$\sum A t^p \mathfrak{M} \cos(\nu t + H),$$
где $\mathfrak{M}$ обозначает произведение целых неотрицательных степеней $\xi_j^0$, $\eta_j^0$.

Коэффициент $A$ зависит только от $L_i^0$ и имеет множителем произведение целых неотрицательных степеней масс $m_1, m_2, \ldots$. Сумма показателей этих масс, которую мы обозначим через $m$, называется, как уже было сказано, порядком соответствующего члена, а разность $m-p$ называется его рангом.

## § 13. Теорема Пуанкаре о ранге

Теорема Лапласа — Лагранжа о неизменности больших полуосей планетных орбит была весьма существенно обобщена следующей теоремой Пуанкаре о ранге возмущений [Пуанкаре, 1905].

*Теорема.* Если средние движения планет $n_i$ таковы, что величина $\nu$, определяемая равенством (12.4), равняется нулю только в том случае, когда $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1} = 0$, то: