где
$$\nu = \sum k_i n_i, \tag{12.4}$$
а через B обозначены постоянные коэффициенты, то интегрирование даст
$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta_1 L_i; \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta_1 \lambda_i; \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j; \quad \eta_j = \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j. \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

Через $\delta_1 L_i, \ldots, \delta_1 \eta_j$ здесь обозначены суммы вида
$$B_0 t + \sum B \nu^{-1} \sin(\nu t + H').$$

Вековые члены $B_0 t$ получаются от интегрирования тех членов ряда (12.3), в которых $\nu = 0$.

Уравнения (12.1) показывают, что в $\delta_1 L_i$ вековые члены отсутствуют. Этот результат эквивалентен, как легко видеть, теореме Лапласа — Лагранжа о неизменности больших полуосей планетных орбит с точностью до первых степеней возмущающих масс.

Подстановка выражений (12.5) в правые части уравнений (12.1) даст возможность получить следующее приближение. Продолжая этот процесс дальше после какого угодно числа приближений, будем иметь
$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i; \quad \lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta \lambda_i; \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta \xi_j; \quad \eta_j = \eta_j^0 + \delta \eta_j, \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$
причем каждая из величин $\delta L_i, \ldots, \delta \eta_j$ будет представлена рядом вида
$$\sum A t^p \mathfrak{M} \cos(\nu t + H),$$
где $\mathfrak{M}$ обозначает произведение целых неотрицательных степеней ξ_j^0, η_j^0.

Коэффициент A зависит только от L_i^0 и имеет множителем произведение целых неотрицательных степеней масс $m_1, m_2, \ldots$. Сумма показателей этих масс, которую мы обозначим через m, называется, как уже было сказано, порядком соответствующего члена, а разность $m-p$ называется его рангом.

§ 13. Теорема Пуанкаре о ранге

Теорема Лапласа — Лагранжа о неизменности больших полуосей планетных орбит была весьма существенно обобщена следующей теоремой Пуанкаре о ранге возмущений [Пуанкаре, 1905].

Теорема. Если средние движения планет n_i таковы, что величина ν, определяемая равенством (12.4), равняется нулю только в том случае, когда $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1} = 0$, то:

1) в разложениях δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ формул (12.6) нет членов, имеющих отрицательный ранг;

2) ранг каждого смешанного члена не может быть меньше единицы;

3) разложение δL_i не содержит членов нулевого ранга.

Для членов первого порядка справедливость этих утверждений очевидна. В самом деле, разложения $\delta_1 L_i$, $\delta_1\lambda_i$, $\delta_1\xi_j$, $\delta_1\eta_j$, входящие в формулы (12.5), не содержат вовсе смешанных членов; в $\delta_1 L_i$ вековые члены отсутствуют; наконец, в $\delta_1\lambda_i$, $\delta_1\xi_j$, $\delta_1\eta_j$ вековые члены могут быть лишь вида At, а ранг таких членов равен нулю.

Предположим, что теорема справедлива для всех членов, порядок которых $\leqslant m$, и покажем, что она будет справедлива в этом случае и для членов $(m+1)$-го порядка. Доказательство разделим на три части.

Прежде всего дадим формулы для вычисления членов $(m+1)$-го порядка.

Чтобы получить эти члены, нужно выражения

$$\left.\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i; & \lambda_i &= n_i t + \lambda_i^0 + \delta\lambda_i;\\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta\xi_j; & \eta_j &= \eta_j^0 + \delta\eta_j, \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

в которых через δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ обозначены совокупности всех членов до m-го порядка включительно, подставить в правые части уравнений (12.1), которые можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial\lambda_i}; & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial L_i} - \frac{\partial R_0}{\partial L_i};\\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial\eta_j}; & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial\xi_j}. \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Интегрирование трех уравнений, не содержащих R_0, дает формулы

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial\lambda_i}\,dt; \quad \delta\xi_j = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial\eta_j}\,dt; \quad \delta\eta_j = -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial\xi_j}\,dt, \tag{13.3}$$

позволяющие вычислить в δL_i, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ все члены $(m+1)$-го порядка, поскольку R есть величина первого порядка.

Чтобы найти члены $(m+1)$-го порядка в средних долготах λ_i, нужно еще рассмотреть разложение $\partial R_0/\partial L_i$. Так как

$$R_0 = R_0(L_1^0 + \delta L_1,\ L_2^0 + \delta L_2,\ \ldots) =$$
$$= R_0(L_1^0,\ L_2^0,\ \ldots) - \sum_i n_i\,\delta L_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\,\delta L_i\,\delta L_k + \Phi,$$

где

$$n_l = -\partial R_0/\partial L_l^0; \quad C_{lk} = \partial^2 R_0/\partial L_l^0 \partial L_k^0,$$

а через Ф обозначена совокупность членов третьего и высших порядков относительно δL_i, то

$$\frac{\partial R_0}{\partial L_l} = \frac{\partial R_0}{\partial (\delta L_l)} = -n_l + \sum_k C_{lk}\delta L_k + \frac{\partial \Phi}{\partial L_l}.$$

Поэтому интегрирование оставшегося из уравнений (13.2) даст, если учесть (13.3),

$$\delta\lambda_l = -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_l} dt - \sum_k C_{lk} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_l} dt. \qquad (13.4)$$

Легко убедиться, что при подстановке в правую часть этого равенства выражений (13.1), имеющих ошибку $(m+1)$-го порядка, мы получим $\delta\lambda_i$ с ошибкой порядка $m+2$. Для первых двух членов правой части это очевидно, поскольку R имеет множителем величины первого порядка. Остается рассмотреть последний член.

Производная $\partial\Phi/\partial L_i$, входящая в последний член (13.4), есть сумма членов по меньшей мере второго порядка относительно возмущений δL_i, каждое из которых первого порядка относительно возмущающих масс.

Обозначим через A, B, C, ... точные значения δL_1, δL_2, ..., а через A', B', C', ... их приближенные значения, имеющие ошибки порядка $m+1$. Тождества вида

$$AB - A'B' = A(B-B') + B'(A-A'),$$

$$ABC - A'B'C' = AB(C-C') + AC'(B-B') + B'C'(A-A')$$

. . . .

показывают, что замена A, B, ... через A', B', ... даст $\partial\Phi/\partial L_i$ с ошибкой порядка $m+2$.

Мы доказали, таким образом, что при замене в правых частях формул (13.3) и (13.4) возмущений их величинами, точными до m-го порядка включительно, эти формулы дадут возмущения, точные до $(m+1)$-го порядка включительно.

Перейдем теперь к доказательству теоремы в отношении возмущений δL_i, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$.

Заметим, прежде всего, что при перемножении двух членов, ранги которых положительны, получается сумма членов, также имеющих положительные ранги. При перемножении членов, имеющих неотрицательные ранги, могут получиться только члены с неотрицательными рангами.

Поэтому, подставив в правые части формул (13.3) выражения (13.1), не имеющие, согласно сделанному нами предположению, членов отрицательного ранга, мы получим под знаком каждого интеграла только члены неотрицательного ранга. Более того, так как подстановка делается в выражения, имеющие множителями одну из масс m_i, то под знаком каждого интеграла в (13.3) мы будем иметь лишь члены, ранг которых $\geqslant 1$.

Хорошо известные формулы

$$\int_0^t At^p \cos(\nu t + H)\,dt = \\ = A\nu^{-1}t^p \sin(\nu t + H) + pA\nu^{-2}t^{p-1}\cos(\nu t + H) + \ldots, \qquad (13.5)$$

$$\int_0^t At^p\,dt = \frac{1}{p+1}At^{p+1}$$

показывают, что ранг смешанных и периодических членов не изменится, а ранг вековых членов понизится на единицу. Таким образом, формулы (13.3) дадут члены, ранг которых $\geqslant 0$. А так как понижение ранга имеет место только для вековых членов, то ранг каждого смешанного члена не может быть меньше единицы.

Остается показать, что выражение δL_i, даваемое формулой (13.3), не заключает членов нулевого ранга.

Подставив в производную $\partial R/\partial\lambda_i$ выражения (13.1) и разложив эту производную в ряд, получим

$$\partial R/\partial\lambda_i = \sum D_0\mathfrak{N}, \qquad (13.6)$$

где через D_0 обозначены частные производные, взятые от $\partial R/\partial\lambda_i$ по элементам, после замены в этих производных элементов их начальными значениями

$$L_i^0, \quad n_it + \lambda_i^0, \quad \xi_j^0, \quad \eta_j^0; \qquad (13.7)$$

через $\mathfrak{N}$ обозначено произведение целых неотрицательных степеней δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$, вычисленных до членов m-го порядка включительно.

Рассмотрим сначала D_0. Воспользовавшись теоремой 1, доказанной в § 11, для производных функции $\partial R/\partial\lambda_i$, по элементам будем иметь разложения вида

$$\sum A\mathfrak{M}\cos(\nu t + H),$$

где A зависят только от L_i, а $\mathfrak{M}$ даются равенством (11.3)

После подстановки значений (13.7) получим

$$D_0 = \sum A_0\mathfrak{M}_0\cos(\nu t + H).$$

Здесь $\nu=\sum k_h n_h$ не может равняться нулю, так как по условиям доказываемой нами теоремы ν могло бы быть равно нулю лишь в случае, когда все k_h равны нулю; но в $\partial R/\partial\lambda_i$ могут быть лишь такие члены, в которых $k_i\neq 0$.

Итак, D_0 состоит из одних только периодических членов. Ранг каждого такого члена, очевидно, равен или больше единицы.

Рассмотрим теперь множитель $\mathfrak{R}$, входящий в разложение (13.6). Так как, согласно нашему предположению, в δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ членами нулевого ранга могут быть только вековые члены, то в разложении $\mathfrak{R}$ каждый член нулевого ранга должен быть вековым.

При перемножении D_0 и $\mathfrak{R}$ мы можем получить в (13.6) только члены, ранг которых не меньше единицы. Те члены, ранг которых равняется единице, не могут быть вековыми: они будут либо периодическими, либо смешанными. Но ранг таких членов, как показывает формула (13.5), при интегрировании не меняется. Отсюда следует, что разложение величины

$$\delta L_i=\int_0^t \frac{\partial R}{\partial\lambda_i}\,dt$$

действительно не содержит членов нулевого ранга.

Теорема полностью доказана для возмущений, даваемых формулами (13.3). Остается убедиться в ее справедливости для возмущений средних долгот $\delta\lambda_i$, даваемых формулой (13.4).

К первому члену формулы (13.4) применимо все, что было только что сказано относительно формул (13.3). Таким образом, этот член не может дать ни членов отрицательного ранга, ни смешанных членов нулевого ранга.

Рассмотрим теперь последний член формулы (13.4). Мы уже видели, что $\partial\Phi/\partial L_i$ состоит из членов по меньшей мере второй степени относительно величин δL_h. Так как δL_h равняется в свою очередь сумме членов, имеющих ранг $\geqslant 1$, то ранг каждого члена $\partial\Phi/\partial L_i$ будет $\geqslant 2$. Интегрирование может уменьшить ранг на единицу, но он все же будет $\geqslant 1$, что соответствует требованиям теоремы.

Остается рассмотреть второй член формулы (13.4). Как мы уже видели, разложение производной $\partial R/\partial\lambda_i$ не содержит членов нулевого ранга, а все члены первого ранга в этом разложении являются либо периодическими, либо смешанными. И в том и в другом случае ранг их при двойном интегрировании не изменится. Все остальные члены в $\partial R/\partial\lambda_i$ имеют ранг $\geqslant 2$. После двойного интегрирования изменится ранг только вековых членов, но он будет во всяком случае $\geqslant 0$.

Таким образом, среди членов $(m+1)$-го порядка в разложениях $\delta\lambda_i$, также отсутствуют члены отрицательного ранга и смешанные члены нулевого ранга.

Теорема полностью доказана.

§ 14. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона об отсутствии у больших полуосей планетных орбит вековых возмущений второго порядка, приведенная выше без доказательства (§ 13 гл. XVI), является дальнейшим развитием основной теоремы Лапласа — Лагранжа, но в другом направлении, нежели рассмотренная в предыдущем параграфе теорема Пуанкаре.

Уравнения (10.3) показывают, что большие полуоси планетных орбит a_i связаны с величинами L_i следующим равенством:

$$a_i = k_1^{-2} L_i^2,$$

где

$$k_1^2 = k^2 m_0 (m_0 + m_1 + \ldots + m_i)(m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1})^{-1}.$$

Таким образом, возмущения этих элементов связаны соотношением

$$a_i^0 + \delta_1 a_i + \delta_2 a_i + \ldots = k_1^{-2} (L_i^0 + \delta_1 L_i + \delta_2 L_i + \ldots)^2,$$

которое дает

$$\delta_1 a_i = 2k_1^{-2} L_i^0 \cdot \delta_1 L_i,$$

$$\delta_2 a_i = k_1^{-2} \left[(\delta_1 L_i)^2 + 2L_i^0 \cdot \delta_2 L_i\right].$$

В предыдущем параграфе мы видели, что $\delta_1 L_i$ состоят только из периодических членов. Отсюда следует, что в $\delta_1 a_i$ вековые члены отсутствуют, а в $\delta_2 a_i$ они могли бы быть лишь в том случае, если бы они были в $\delta_2 L_i$. Поэтому теорема Пуассона является следствием следующей теоремы:

Теорема. Если средние движения планет таковы, что величина

$$\nu = \sum k_i n_i, \tag{14.1}$$

где целые числа k_i не все равны нулю, не может равняться нулю, то возмущения второго порядка $\delta_2 L_i$ не содержат вековых членов.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, вычислим $\delta_2 L_i$ при помощи первой из формул (13.3), которую можно написать так:

$$\frac{d}{dt}(\delta L_i) = \frac{\partial R}{\partial \lambda_i}. \tag{14.2}$$