Таким образом, среди членов $(m+1)$-го порядка в разложениях $\delta\lambda_i$, также отсутствуют члены отрицательного ранга и смешанные члены нулевого ранга.

Теорема полностью доказана.

§ 14. Теорема Пуассона

Теорема Пуассона об отсутствии у больших полуосей планетных орбит вековых возмущений второго порядка, приведенная выше без доказательства (§ 13 гл. XVI), является дальнейшим развитием основной теоремы Лапласа — Лагранжа, но в другом направлении, нежели рассмотренная в предыдущем параграфе теорема Пуанкаре.

Уравнения (10.3) показывают, что большие полуоси планетных орбит a_i связаны с величинами L_i следующим равенством:

$$a_i = k_1^{-2} L_i^2,$$

где

$$k_1^2 = k^2 m_0 (m_0 + m_1 + \ldots + m_i)(m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1})^{-1}.$$

Таким образом, возмущения этих элементов связаны соотношением

$$a_i^0 + \delta_1 a_i + \delta_2 a_i + \ldots = k_1^{-2} (L_i^0 + \delta_1 L_i + \delta_2 L_i + \ldots)^2,$$

которое дает

$$\delta_1 a_i = 2k_1^{-2} L_i^0 \cdot \delta_1 L_i,$$
$$\delta_2 a_i = k_1^{-2} \left[(\delta_1 L_i)^2 + 2L_i^0 \cdot \delta_2 L_i\right].$$

В предыдущем параграфе мы видели, что $\delta_1 L_i$ состоят только из периодических членов. Отсюда следует, что в $\delta_1 a_i$ вековые члены отсутствуют, а в $\delta_2 a_i$ они могли бы быть лишь в том случае, если бы они были в $\delta_2 L_i$. Поэтому теорема Пуассона является следствием следующей теоремы:

Теорема. Если средние движения планет таковы, что величина

$$\nu = \sum k_i n_i, \tag{14.1}$$

где целые числа k_i не все равны нулю, не может равняться нулю, то возмущения второго порядка $\delta_2 L_i$ не содержат вековых членов.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, вычислим $\delta_2 L_i$ при помощи первой из формул (13.3), которую можно написать так:

$$\frac{d}{dt}(\delta L_i) = \frac{\partial R}{\partial \lambda_i}. \tag{14.2}$$

В правой части здесь следует положить

$$L_k = L_k^0 + \delta_1 L_k, \quad \lambda_k = n_k t + \lambda_k^0 + \delta_1 \lambda_k, \quad \xi_j = \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j$$
$$\eta_j = \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j.$$

В пределах нужной нам точности это дает:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_l} = \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_l}\right)_0 + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial L_k}\right)_0 \delta_1 L_k + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial \lambda_k}\right)_0 \delta_1 \lambda_k + \\ + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial \xi_j}\right)_0 \delta_1 \xi_j + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial \eta_j}\right)_0 \delta_1 \eta_j.$$

Входящие сюда возмущения первого порядка могут быть вычислены по формулам (13.3) и (13.4). При помощи (13.3) находим

$$\delta_1 L_k = \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_k}\right)_0 dt, \quad \delta_1 \xi_j = \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \eta_j}\right)_0 dt, \quad \delta_1 \eta_j = -\int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_j}\right)_0 dt, \tag{14.3}$$

тогда как формула (13.4) может быть представлена следующим образом:

$$\delta_1 \lambda_k = \delta_1' \lambda_k + \delta_1'' \lambda_k,$$

где

$$\delta_1' \lambda_k = -\int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial L_k}\right)_0 dt, \quad \delta_1'' \lambda_k = -\sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}\right)_0 dt. \tag{14.4}$$

Последний член формулы (13.4) здесь опущен, поскольку в $\partial R/\partial \lambda_i$ он дает члены не ниже третьего порядка.

Уравнение (14.2) показывает, что для нахождения интересующих нас возмущений второго порядка можно пользоваться формулой:

$$\frac{d}{dt}(\delta_2 L_l) = \sum \left\{ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial L_k}\right)_0 \delta_1 L_k + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial \lambda_k}\right)_0 \delta_1' \lambda_k \right\} + \\ + \sum \left\{ \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i\, \partial \xi_j}\right)_0 \delta_1 \xi_j + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i\, \partial \eta_j}\right)_0 \delta_1 \eta_j \right\} + \\ + \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_l\, \partial \lambda_k}\right)_0 \delta_1'' \lambda_k. \tag{14.5}$$

Вековые члены в $\delta_2 L_i$ могут получиться лишь в случае наличия в правой части этого равенства постоянных членов.

Легко видеть, что первая из сумм, стоящих в выражении (14.5), не может содержать постоянного члена. В самом деле, обозначим через

$$R' = A'\mathfrak{M}' \cos\left(\sum k_g' \lambda_g + H'\right); \quad R'' = A''\mathfrak{M}'' \cos\left(\sum k_g'' \lambda_g + H''\right)$$

два какие-либо члена в разложении пертурбационной функции, даваемом формулой (11.2). Рассматриваемая сумма состоит, очевидно, из слагаемых вида

$$\left(\frac{\partial^2 R'}{\partial\lambda_i\,\partial L_h}\right)_0 \int\limits_0^t \left(\frac{\partial R''}{\partial\lambda_h}\right)_0 dt =$$

$$= k_i' \frac{\partial A_0'}{\partial L_h^0} \mathfrak{M}_0' \sin\left(\sum k_g'\lambda_g + H'\right) k_h'' A_0'' \mathfrak{M}_0'' \nu^{-1} \times$$

$$\times \left[\cos\left(k_g''\lambda_g + H''\right) - \cos\left(\sum k_g''\lambda_g^0 + H''\right)\right] \qquad \left(\nu = \sum k_g'' n_g\right)$$

и слагаемых вида

$$\left(\frac{\partial^2 R'}{\partial\lambda_i\,\partial\lambda_h}\right)_0 \int\limits_0^t \left(\frac{\partial R''}{\partial L_h}\right)_0 dt =$$

$$= - k_i' k_h' A_0' \mathfrak{M}_0' \cos\left(\sum k_g'\lambda_g + H'\right) \frac{\partial A_0''}{\partial L_h^0} \mathfrak{M}_0'' \nu^{-1} \times$$

$$\times \left[\sin\left(\sum k_g''\lambda_g + H''\right) - \sin\left(\sum k_g''\lambda_g^0 + H''\right)\right],$$

если только не все k_g'' равны нулю. Но такие слагаемые равны суммам периодических членов, ни один из которых в силу условий теоремы не равен постоянному числу.

Если все k_g'' равны нулю, то соответствующие слагаемые первой суммы могут дать смешанные, но. отнюдь не постоянные члены.

Совершенно так же можно убедиться, что вторая и третья суммы выражения (14.5) могут дать только периодические или смешанные члены.

Таким образом, доказано отсутствие вековых членов в $\delta_2 L_i$, а вместе с тем и теорема Пуассона.

Пуанкаре [1905] доказал более общую теорему: он показал, что возмущения δL не могут содержать вековых членов не только нулевого ранга, но и первого ранга.

Вопросы, связанные с теоремой Пуассона, были подробно рассмотрены Хагихара [1945].

§ 15. Теорема Пуанкаре о классе

В результате решения уравнений (12.1) методом последовательных приближений каждая из величин δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ получается в виде суммы членов вида

$$A_0 \mathfrak{M}_0 t^p \nu_1^{-q_1} \nu_2^{-q_2} \ldots \cos\left(\sum k_g\lambda_g + H\right), \qquad (15.1)$$