два какие-либо члена в разложении пертурбационной функции, даваемом формулой (11.2). Рассматриваемая сумма состоит, очевидно, из слагаемых вида

$$\left(\frac{\partial^2 R'}{\partial\lambda_i\,\partial L_h}\right)_0\int_0^t\left(\frac{\partial R''}{\partial\lambda_h}\right)_0 dt=$$
$$=k'_i\frac{\partial A'_0}{\partial L_h^0}\mathfrak{M}'_0\sin\left(\sum k'_g\lambda_g+H'\right)k''_hA''_0\mathfrak{M}''_0\nu^{-1}\times$$
$$\times\left[\cos\left(k''_g\lambda_g+H''\right)-\cos\left(\sum k''_g\lambda_g^0+H''\right)\right]\qquad\left(\nu=\sum k''_gn_g\right)$$

и слагаемых вида

$$\left(\frac{\partial^2 R'}{\partial\lambda_i\,\partial\lambda_h}\right)_0\int_0^t\left(\frac{\partial R''}{\partial L_h}\right)_0 dt=$$
$$=-k'_ik'_hA'_0\mathfrak{M}'_0\cos\left(\sum k'_g\lambda_g+H'\right)\frac{\partial A''_0}{\partial L_h^0}\mathfrak{M}''_0\nu^{-1}\times$$
$$\times\left[\sin\left(\sum k''_g\lambda_g+H''\right)-\sin\left(\sum k''_g\lambda_g^0+H''\right)\right],$$

если только не все k''_g равны нулю. Но такие слагаемые равны суммам периодических членов, ни один из которых в силу условий теоремы не равен постоянному числу.

Если все k''_g равны нулю, то соответствующие слагаемые первой суммы могут дать смешанные, но. отнюдь не постоянные члены.

Совершенно так же можно убедиться, что вторая и третья суммы выражения (14.5) могут дать только периодические или смешанные члены.

Таким образом, доказано отсутствие вековых членов в $\delta_2 L_i$, а вместе с тем и теорема Пуассона.

Пуанкаре [1905] доказал более общую теорему: он показал, что возмущения δL не могут содержать вековых членов не только нулевого ранга, но и первого ранга.

Вопросы, связанные с теоремой Пуассона, были подробно рассмотрены Хагихара [1945].

§ 15. Теорема Пуанкаре о классе

В результате решения уравнений (12.1) методом последовательных приближений каждая из величин δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ получается в виде суммы членов вида

$$A_0\mathfrak{M}_0t^p\nu_1^{-q_1}\nu_2^{-q_2}\ldots\cos\left(\sum k_g\lambda_g+H\right),\tag{15.1}$$

где через

$$\nu_\alpha = \sum k_g^\alpha n_g \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots) \tag{15.2}$$

обозначены делители, введенные последовательными интегрированиями.

Если коэффициент A_0 порядка m относительно возмущающих масс, то величина

$$m - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q_\alpha$$

называется классом возмущения (15.1) относительно рассматриваемого делителя ν_α (§ 11 гл. XVI).

Теорема. Если средние движения n_g таковы, что величина (15.2) может равняться нулю только в том случае, когда все целые числа k_g^α равны нулю, то в разложении $\delta\lambda_i$ класс каждого члена относительно любого делителя $\geqslant 0$; в разложениях δL_i, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$ класс каждого члена $\geqslant 1/2$.

Заметим, прежде всего, что справедливость этой теоремы для возмущений первого порядка непосредственно вытекает из выражений (14.3) и (14.4). Так, формулы (14.4) показывают, что $\delta_1\lambda_i$ состоят из членов, для которых либо $m=1$, $p=1$, $q=0$, либо $m=1$, $p=0$, $q=0$ или 2, а из формул (14.3) следует, что $\delta_1 L_i$, $\delta_1\xi_j$, $\delta_1\eta_j$ состоят из членов, в которых либо $m=1$, $p=0$, $q=0$ или 1, либо $m=1$, $p=1$, $q=0$.

Допустим, что теорема справедлива для всех возмущений до m-го порядка включительно, и покажем, что она будет тогда справедлива и для возмущений $(m+1)$-го порядка. Это и докажет теорему.

Для доказательства второй части теоремы воспользуемся для вычисления возмущений $(m+1)$-го порядка формулами (13.3), т. е.

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt, \quad \delta\xi_j = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \eta_j} dt, \quad \delta\eta_j = -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial \xi_j} dt. \tag{15.3}$$

Если в каждую из стоящих здесь производных функции R подставить возмущенные значения элементов до m-го порядка включительно, то эти производные можно написать в виде сумм вида (13.6), т. е.

$$\sum D_0 \mathfrak{N}. \tag{15.4}$$

Мы уже видели, что каждый из стоящих здесь множителей D_0 разлагается в ряд, состоящий из одних только периодических членов. Класс каждого из этих членов равен единице, так как здесь $m=1$, $p=0$, $q=0$.

С другой стороны, $\mathfrak{R}$ есть произведение целых неотрицательных степеней δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$, вычисленных до членов m-го порядка включительно. Но эти величины являются суммами членов, класс каждого из которых согласно сделанному допущению неотрицателен.

Так как произведение двух членов может дать лишь члены, классы которых равны сумме классов перемножаемых членов, то из всего сказанного следует, что сумма (15.4) состоит из членов, класс которых $\geqslant 1$. При подстановке этих членов в формулы (15.3) и интегрировании их порядок не изменится, а один (и только один) из показателей p и q может увеличиться на единицу. Таким образом, в возмущениях $(m+1)$-го порядка могут появиться члены, имеющие класс, равный $1/2$, но не ниже.

Для доказательства первой части теоремы рассмотрим вычисление возмущений $(m+1)$-го порядка в $\delta\lambda_i$ при помощи формулы (13.4). Эта формула дает:

$$\delta\lambda_l = -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_l}\,dt - \sum C_{lk}\int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k}\,dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_l}\,dt. \qquad (15.5)$$

В двух первых членах подынтегральные функции разлагаются в ряды только что рассмотренного вида. Принимая во внимание, что двукратное интегрирование может увеличить сумму $p+q$ не более чем на две единицы, убеждаемся, что эти два члена могут дать лишь члены, имеющие класс $\geqslant 0$.

Рассмотрим третий член формулы (15.5). Производная $\partial\Phi/\partial L_i$ состоит (§ 13) из членов по крайней мере второй степени относительно величин δL_i. Так как каждая из этих величин, вычисленная до членов m-го порядка включительно, состоит, по нашему допущению, из членов, класс которых $\geqslant 1/2$, то произведение двух и более величин δL_i будет состоять из членов, имеющих класс $\geqslant 1$.

Интегрирование может увеличить сумму $p+q$ не больше чем на единицу. Отсюда ясно, что третий член формулы (15.5) может дать в возмущениях $(m+1)$-го порядка только члены, класс которых $\geqslant 1/2$. Теорема полностью доказана.

§ 16. Возмущения наименьшего класса

Рассмотрим в возмущениях элементов члены наименьшего класса относительно некоторого определенного делителя

$$\nu_0 = \sum k_l^0 n_l. \qquad (16.1)$$

Покажем, что все такие члены (иначе говоря, члены класса $1/2$ в разложениях δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$ и члены нулевого класса в