С другой стороны, $\mathfrak{R}$ есть произведение целых неотрицательных степеней δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$, вычисленных до членов m-го порядка включительно. Но эти величины являются суммами членов, класс каждого из которых согласно сделанному допущению неотрицателен.

Так как произведение двух членов может дать лишь члены, классы которых равны сумме классов перемножаемых членов, то из всего сказанного следует, что сумма (15.4) состоит из членов, класс которых $\geqslant 1$. При подстановке этих членов в формулы (15.3) и интегрировании их порядок не изменится, а один (и только один) из показателей p и q может увеличиться на единицу. Таким образом, в возмущениях $(m+1)$-го порядка могут появиться члены, имеющие класс, равный 1/2, но не ниже.

Для доказательства первой части теоремы рассмотрим вычисление возмущений $(m+1)$-го порядка в $\delta\lambda_i$ при помощи формулы (13.4). Эта формула дает:

$$\delta\lambda_l = -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_l}\,dt - \sum C_{lk}\int_0^t dt\int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k}\,dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_l}\,dt. \qquad (15.5)$$

В двух первых членах подынтегральные функции разлагаются в ряды только что рассмотренного вида. Принимая во внимание, что двукратное интегрирование может увеличить сумму $p+q$ не более чем на две единицы, убеждаемся, что эти два члена могут дать лишь члены, имеющие класс $\geqslant 0$.

Рассмотрим третий член формулы (15.5). Производная $\partial\Phi/\partial L_i$ состоит (§ 13) из членов по крайней мере второй степени относительно величин δL_i. Так как каждая из этих величин, вычисленная до членов m-го порядка включительно, состоит, по нашему допущению, из членов, класс которых $\geqslant 1/2$, то произведение двух и более величин δL_i будет состоять из членов, имеющих класс $\geqslant 1$.

Интегрирование может увеличить сумму $p+q$ не больше чем на единицу. Отсюда ясно, что третий член формулы (15.5) может дать в возмущениях $(m+1)$-го порядка только члены, класс которых $\geqslant 1/2$. Теорема полностью доказана.

§ 16. Возмущения наименьшего класса

Рассмотрим в возмущениях элементов члены наименьшего класса относительно некоторого определенного делителя

$$\nu_0 = \sum k_l^0 n_l. \qquad (16.1)$$

Покажем, что все такие члены (иначе говоря, члены класса 1/2 в разложениях δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$ и члены нулевого класса в разложении $\delta\lambda$) имеют форму

$$Bt^p \cos(\beta\nu_0 t + H), \tag{16.2}$$

где β — целое число.

Справедливость этого утверждения для возмущений первого порядка совершенно очевидна. Допустим поэтому, что оно справедливо для возмущений, вычисленных до членов m-го порядка включительно, и убедимся, что ту же форму имеют члены наименьшего класса и в возмущениях $(m+1)$-го порядка.

Обратимся сначала к формулам (15.3) и посмотрим, в каких случаях они могут дать члены класса 1/2. Так как каждое из подынтегральных выражений в (15.3) состоит, как мы видели, из членов, имеющих класс $\geqslant 1$, то в разложениях этих выражений нужно прежде всего отобрать члены, класс которых относительно делителя ν_0 равен единице. Класс такого члена

$$B' t^{p'} \cos(\nu t + H')$$

должен быть затем понижен интегрированием на 1/2. Это может иметь место только в следующих случаях: 1) если $\nu = 0$, то интегрирование повысит на единицу показатель p'; 2) если $\nu = \beta\nu_0$, где β — целое число, то показатель q' делителя ν_0 увеличится на единицу.

Итак, в возмущениях δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$ все члены наименьшего класса, равного 1/2, действительно имеют форму (16.2).

Легко убедиться, что для получения всех этих членов достаточно взять в функции R лишь члены, аргументы которых кратны

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g. \tag{16.3}$$

В самом деле, каждое из подынтегральных выражений в формулах (15.3) разлагается, как мы знаем, в ряд вида (15.4). Входящие в этот ряд величины D_0 являются частными производными R по элементам L_i, λ_i, ξ_j, η_j, в которых эти элементы заменены их начальными значениями L_i^0, $\lambda_i^0 + n_i t$, ξ_j^0, η_j^0. Поэтому каждая из величин D_0 есть сумма членов вида

$$B_0 \cos(\nu t + H_0), \tag{16.4}$$

где

$$\nu = \sum k_g n_g,$$

причем H_0 зависит только от λ_i^0, а B_0 — только от L_i^0, ξ_j^0, η_j^0. Член (16.4), получающийся путем дифференцирования из соответствующего члена

$$B \cos(\nu t + H) \tag{16.5}$$

в разложении функции R, имеет, очевидно, класс, равный единице.

С другой стороны, входящие в (15.4) множители $\mathfrak{R}$, являющиеся произведениями целых неотрицательных степеней δL_i, $\delta\lambda_i$, $\delta\xi_j$, $\delta\eta_j$, вычисленных до членов m-го порядка включительно, могут дать члены нулевого класса только в случае, когда в δL_i, $\delta\lambda_i$, ... взяты члены наинизшего класса, а эти последние имеют, как было показано, форму (16.2).

Таким образом, члены наименьшего класса (первого) в производных $\partial R/\partial\lambda_i$, $\partial R/\partial\xi_j$, $\partial R/\partial\eta_j$, входящих в (15.3), получатся от перемножения членов вида (16.2) и (16.4). Их аргументы будут иметь поэтому форму

$$(\beta\nu_0 \pm \nu)t + \text{const}.$$

Но чтобы после интегрирования получился член класса, равного 1/2, такой аргумент должен быть вида

$$\gamma\nu_0 t + \text{const},$$

где γ — целое число.

Следовательно, должно быть

$$\nu = \sigma\nu_0; \qquad k_g = \sigma k_g^0,$$

где $\sigma = \pm(\gamma - \beta)$ есть целое число.

Поэтому члены (16.5) пертурбационной функции R, дающие члены наименьшего класса в δL, $\delta\xi$, $\delta\eta$, необходимо имеют аргументы вида

$$\sum k_g \lambda_g + H = \sigma\theta + H,$$

т. е. аргументы, кратные θ.

Остается рассмотреть члены наименьшего (нулевого) класса в $\delta\lambda_i$. В предыдущем параграфе мы видели, что эти члены может дать только второй член формулы (15.5). Таким образом, для нахождения этих членов может служить формула

$$\delta\lambda_i = -\sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial\lambda_k}\, dt. \tag{16.6}$$

Мы только что видели, что наименьший возможный класс членов ряда, в который разлагается производная $\partial R/\partial\lambda_k$, равен единице. Двукратное интегрирование в том и только в том случае увеличит сумму $p+q$ на две единицы и даст, таким образом, член нулевого класса, когда аргумент этого члена имеет форму $\beta\nu_0 t + H$.

Итак, действительно, для получения в возмущениях элементов всех членов наименьшего класса по отношению к делителю (16.1) достаточно взять в пертурбационной функции R только те члены, аргументы которых кратны величине θ, определяемой равенством (16.3).

§ 17. Уравнения, дающие члены наименьшего класса

Результаты предыдущего параграфа позволяют легко получить дифференциальные уравнения, дающие члены наименьшего класса в возмущениях элементов.

Обозначим через Ψ совокупность тех членов в разложении пертурбационной функции R, аргументы которых кратны

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g,$$

если через

$$\nu_0 = \sum k_g^0 n_g$$

обозначен делитель, по отношению к которому мы рассматриваем класс.

Обозначим, далее, через $\overset{*}{L}_i$, $\overset{*}{\lambda}_i$, $\overset{*}{\xi}_j$, $\overset{*}{\eta}_j$ совокупности членов наинизшего класса в соответствующих элементах, т. е. класса, равного 1/2 в L_i, ξ_j, η_j и равного нулю в λ_i.

Учитывая сказанное в предыдущем параграфе, из равенств (15.3) получим

$$\frac{d\overset{*}{L}_i}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}; \quad \frac{d\overset{*}{\xi}_j}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}; \quad \frac{d\overset{*}{\eta}_j}{dt} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}. \tag{17.1}$$

Эти уравнения могут быть значительно упрощены. В самом деле, сообразно с тем, что мы видели выше, для получения членов класса 1/2 нужно в разложениях (15.4) частных производных функции R, входящих в (15.3), брать в $\mathfrak{R}$ только члены нулевого класса. Но такие члены можно получить лишь в том случае, если вместо $\delta\lambda_i$ взять члены нулевого класса и положить

$$\delta L_i = 0, \qquad \delta\xi_j = 0, \qquad \delta\eta_j = 0,$$

иначе говоря, положить

$$L_i = L_i^0, \qquad \xi_j = \xi_j^0, \qquad \eta_j = \eta_j^0.$$

Результаты этой подстановки, выполненной в функции Ψ и ее частных производных, обозначим через

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}\right)_0 = \frac{\partial\Psi_0}{\partial\lambda_i}, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}\right)_0.$$

Поскольку указанная подстановка уже выполнена в коэффициентах D_0, входящих в разложения (15.4), уравнения (17.1)