Итак, действительно, для получения в возмущениях элементов всех членов наименьшего класса по отношению к делителю (16.1) достаточно взять в пертурбационной функции R только те члены, аргументы которых кратны величине θ, определяемой равенством (16.3).

§ 17. Уравнения, дающие члены наименьшего класса

Результаты предыдущего параграфа позволяют легко получить дифференциальные уравнения, дающие члены наименьшего класса в возмущениях элементов.

Обозначим через Ψ совокупность тех членов в разложении пертурбационной функции R, аргументы которых кратны

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g,$$

если через

$$\nu_0 = \sum k_g^0 n_g$$

обозначен делитель, по отношению к которому мы рассматриваем класс.

Обозначим, далее, через $\overset{*}{L}_i$, $\overset{*}{\lambda}_i$, $\overset{*}{\xi}_j$, $\overset{*}{\eta}_j$ совокупности членов наинизшего класса в соответствующих элементах, т. е. класса, равного 1/2 в L_i, ξ_j, η_j и равного нулю в λ_i.

Учитывая сказанное в предыдущем параграфе, из равенств (15.3) получим

$$\frac{d\overset{*}{L}_i}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}; \quad \frac{d\overset{*}{\xi}_j}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}; \quad \frac{d\overset{*}{\eta}_j}{dt} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}. \tag{17.1}$$

Эти уравнения могут быть значительно упрощены. В самом деле, сообразно с тем, что мы видели выше, для получения членов класса 1/2 нужно в разложениях (15.4) частных производных функции R, входящих в (15.3), брать в $\mathfrak{R}$ только члены нулевого класса. Но такие члены можно получить лишь в том случае, если вместо $\delta\lambda_i$ взять члены нулевого класса и положить

$$\delta L_i = 0, \qquad \delta\xi_j = 0, \qquad \delta\eta_j = 0,$$

иначе говоря, положить

$$L_i = L_i^0, \qquad \xi_j = \xi_j^0, \qquad \eta_j = \eta_j^0.$$

Результаты этой подстановки, выполненной в функции Ψ и ее частных производных, обозначим через

$$\Psi_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}\right)_0 = \frac{\partial\Psi_0}{\partial\lambda_i}, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}\right)_0.$$

Поскольку указанная подстановка уже выполнена в коэффициентах D_0, входящих в разложения (15.4), уравнения (17.1) можно заменить такими:

$$\frac{dL_i^*}{dt}=\frac{\partial\Psi_0}{\partial\lambda_i};\quad \frac{d\xi_j^*}{dt}=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}\right)_0,\quad \frac{d\eta_j^*}{dt}=-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}\right)_0. \tag{17.2}$$

Для нахождения λ_i^*, т. е. членов нулевого класса в $\delta\lambda_i$, может служить, как мы видели, формула (16.6). Учитывая (15.3), ее можно написать так:

$$\delta\lambda_i=-\sum C_{ik}\int_0^t \delta L_k\,dt=-\sum C_{ik}\int_0^t (L_k-L_k^0)\,dt.$$

Чтобы получить в левой части этого равенства только члены нулевого класса, надо в правой части, в L_k, взять только члены класса, равного 1/2, т. е. положить $L_k=L_k^*$.

Таким образом, учитывая, что

$$\lambda_i=n_it+\lambda_i^0+\delta\lambda_i,$$

будем иметь

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt}=n_i-\sum C_{ik}(L_k^*-L_k^0).$$

Если ввести в рассмотрение функцию

$$\Phi_0=C_0-\sum n_i(L_i^*-L_i^0)+\frac{1}{2}\sum\sum C_{ik}(L_i^*-L_i^0)(L_k^*-L_k^0), \tag{17.3}$$

где C_0 — произвольная постоянная, то последнему равенству можно придать вид

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt}=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial L_i^*}. \tag{17.4}$$

Замечая, наконец, что

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\lambda_i^*}=0,\qquad \frac{\partial\Psi_0}{\partial L_i^*}=0,$$

мы можем заменить уравнения (17.2) и (17.4) такими:

$$\frac{dL_i^*}{dt}=\frac{\partial(\Phi_0+\Psi_0)}{\partial\lambda_i^*};\quad \frac{d\lambda_i^*}{dt}=-\frac{\partial(\Phi_0+\Psi_0)}{\partial L_i^*}, \tag{17.5}$$

$$\frac{d\xi_j^*}{dt}=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta_j}\right)_0,\quad \frac{d\eta_j^*}{dt}=-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi_j}\right)_0. \tag{17.6}$$

Таким образом, для получения в возмущениях элементов членов наименьшего класса, достаточно решить систему уравнений (17.5) и (17.6).