## § 18. Вычисление долгопериодических возмущений

Возмущения наименьшего класса относительно делителя

$$\nu_0 = \sum k_g^0 n_g$$

представляют особый интерес в том случае, когда этот делитель очень мал по сравнению со средними движениями $n_g$. В этом случае амплитуды соответствующих долгопериодических возмущений $L_i^*$, $\lambda_i^*$, $\xi_j^*$, $\eta_j^*$ будут особенно велики. Результаты предыдущего параграфа позволяют находить эти возмущения независимо от прочих путем решения уравнений (17.5) и (17.6), правые части которых являются функциями начальных значений $L_i^0$, $\lambda_i^0$, $\xi_j^0$, $\eta_j^0$ элементов и $2\pi$-периодическими функциями величины

$$\theta = \sum k_g^0 \lambda_g. \tag{18.1}$$

Вследствие того, что правые части рассматриваемых уравнений зависят от $t$ только через посредство $\theta$, решение может быть получено в квадратурах.

Первое из уравнений (17.5) дает

$$\frac{dL_i^*}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i^*} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta} k_i^0.$$

Введем вспомогательную величину $U$, определяемую равенством

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta}.$$

Это даст

$$\frac{dL_i^*}{dt} - k_i^0 \frac{dU}{dt} = 0,$$

откуда

$$L_i^* = k_i^0 U + L_i^0, \tag{18.2}$$

если принять, что $U=0$ для $t=0$.

Подставив значения (18.2) в выражение (17.3), определяющее функцию $\Phi_0$, получим

$$\Phi_0 = \mathrm{const} - 2BU - AU^2, \tag{18.3}$$

где через $A$ и $B$ обозначены постоянные коэффициенты.

Уравнения (17.5) имеют очевидный интеграл

$$\Phi_0 + \Psi_0 = \mathrm{const},$$

дающий

$$C + \Psi_0 = 2BU + AU^2,$$

где $C$ — постоянная величина.

Поэтому величина $U$ выражается через $\theta$ следующим образом:

$$AU + B = (B^2 + AC + A\Psi_0)^{\frac{1}{2}}. \tag{18.4}$$

Соотношения (18.1), (17.4) и (18.2) показывают, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum k_g^0 \frac{d\lambda_g}{dt} = -\sum k_g^0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_g^*} = -\sum \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i^*} \frac{dL_i^*}{dU} = -\frac{d\Phi_0}{dU}.$$

На основании (18.3) и (18.4) это дает

$$\frac{d\theta}{dt} = 2B + 2AU = 2(B^2 + AC + A\Psi_0)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$2t = \int_{\theta_0}^{\theta} (A\Psi_0 + B^2 + AC)^{-1/2}\, d\theta. \tag{18.5}$$

Формулы (18.2) и (18.4) решают задачу в отношении элементов $L_i$. Уравнение (17.4) показывает, что

$$\frac{d\lambda_i^*}{dt} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i^*} = n_i - \sum C_{ik}(L_k^* - L_k^0) = n_i - U \sum k_k^0 C_{ik}.$$

После замены здесь $U$ его значением (18.4) и интегрирования найдем $\lambda_i^*$. Точно так же интегрирование уравнений (17.6) даст $\xi_j$, $\eta_j$ в виде функций $\theta$. Решение задачи завершается соотношением (18.5), устанавливающим зависимость между $\theta$ и $t$.

Метод, созданный Делоне для последовательного получения отдельных периодических возмущений, оказался весьма плодотворным. Он позволил построить наиболее полную алгебраическую теорию движения Луны [Делоне, 1860—1867]. Попытки использовать принципы этого метода для изучения движения планет были сделаны Хиллом. В 1900 г. он дал метод, в некоторых отношениях существенно обобщающий метод Делоне [Хилл, 1907]. Работы Пуанкаре глубоко осветили сущность этих методов [Пуанкаре, 1893; Пуанкаре, 1907] *).

*) Некоторая обобщающая модификация этих методов была предложена Цейпелем [1915—1917]. (*Прим. ред.*)