Член с аргументом M' дает возмущение, имеющее годовой период и получившее название годичного неравенства. Это неравенство (открытое Тихо Браге) вызывается эллиптичностью земной орбиты, производящей изменение расстояния до Солнца, а следовательно, и величины возмущающей силы. В настоящее время годичным неравенством обычно называется совокупность всех членов, зависящих от средней аномалии Солнца, а именно:

$$-659'',2\sin M' + 152'',1\sin(2D - M') - 21'',6\sin(2D + M') + \ldots$$

Совокупность членов с аргументами D, $3D$, $5D$, ... принято называть параллактическим неравенством. Амплитуда каждого из этих членов пропорциональна отношению a/a' больших полуосей орбит Луны и Солнца. Так как величина a находится с большой точностью из измерений параллакса Луны, то сравнение полученной из наблюдений величины параллактического неравенства с теоретической дает возможность найти a', т. е. параллакс Солнца. Этот метод является одним из наиболее эффективных среди гравитационных методов нахождения солнечного параллакса.

Вместо радиуса-вектора Луны r обычно рассматривается ее параллакс P, определяемый равенством

$$\sin P = \frac{a}{r}\sin P_{☾}, \quad P_{☾} = 3422'',57.$$

Возмущения параллакса и широты состоят из членов с теми же аргументами и носящими те же названия, как и в разложении долготы. Так, для возмущенного значения параллакса имеем

$$P = 3424'' + 187''\cos M + 10''\cos 2M + \ldots$$
$$\ldots + 34''\cos(2D - M) + \ldots + 28''\cos 2D + \ldots,$$

где в первой строке дано среднее значение параллакса и эллиптические члены, а во второй — важнейшие возмущения.

§ 2. Основная проблема

Массы Земли T и Луны L условимся обозначать этими же буквами, а массу Солнца S будем обозначать через m'. Координаты L и S в инерциальной системе, начало которой находится в T, обозначим соответственно через ξ, η, ζ и ξ_1, η_1, ζ_1. Пусть, далее, координаты Солнца относительно параллельных осей с началом в G (центр инерции Земли и Луны) будут

$$\xi' = \xi_1 - \frac{L}{T+L}\xi; \quad \eta' = \eta_1 - \frac{L}{T+L}\eta; \quad \zeta' = \zeta_1 - \frac{L}{T+L}\zeta.$$

Обозначив через r, r_1, r' и Δ расстояния TL, TS, GS и LS, а через H' угол между векторами GL и GS, будем иметь

$$r_1^2 = r'^2 + \frac{2L}{T+L} rr' \cos H' + \left(\frac{L}{T+L}\right)^2 r^2, \tag{2.1}$$

$$\Delta^2 = r'^2 - \frac{2T}{T+L} rr' \cos H' + \left(\frac{T}{T+L}\right)^2 r^2. \tag{2.2}$$

Уравнения движения Луны и Солнца мы можем написать следующим образом (§ 5 гл. XIV):

$$\ddot{\xi} = \nu \frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad \ddot{\eta} = \nu \frac{\partial U}{\partial \eta}; \quad \ddot{\zeta} = \nu \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \tag{2.3}$$

$$\ddot{\xi}' = \nu' \frac{\partial U}{\partial \xi'}; \quad \ddot{\eta}' = \nu' \frac{\partial U}{\partial \eta'}; \quad \ddot{\zeta}' = \nu' \frac{\partial U}{\partial \zeta'}, \tag{2.4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \frac{T+L}{TL}; \qquad \nu' = \frac{T+L+m'}{m'(T+L)}, \\ U &= k^2\left(\frac{TL}{r} + \frac{Tm'}{r_1} + \frac{Lm'}{\Delta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Хорошо известные свойства полиномов Лежандра $P_n(x)$ дают разложение

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty \alpha^n P_n(x),$$

сходящееся при $|\alpha| < 1$, $|x| \leqslant 1$. Поэтому на основании (2.1) и (2.2)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r'} \sum_0^\infty \left(\frac{-L}{T+L} \frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H'), \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_0^\infty \left(\frac{T}{T+L} \frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H'). \tag{2.7}$$

Рассмотрим сначала уравнения движения Солнца (2.4). Отбросив в выражении (2.5) для U первый член, их можно написать так:

$$\ddot{\xi}' = \frac{\partial U'}{\partial \xi'}; \quad \ddot{\eta}' = \frac{\partial U'}{\partial \eta'}; \quad \ddot{\zeta}' = \frac{\partial U'}{\partial \zeta'}, \tag{2.8}$$

где

$$U' = \frac{k^2(T+L+m')}{T+L}\left(\frac{T}{r_1} + \frac{L}{\Delta}\right),$$

или, пользуясь разложениями (2.6) и (2.7),

$$U' = \frac{k^2(T+L+m')}{r'}\left[1 + \frac{TL}{(T+L)^2}\left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_n(\cos H') + \ldots\right].$$

Так как всегда
$$|P_n(\cos H')| \leqslant 1,$$
а в рассматриваемом случае $L/T < 1/80$ и $r/r' < 1/389$, то легко видеть, что уже второй член этого разложения не превосходит 1/12 500 000 часть первого члена. Мы можем поэтому пренебречь здесь вторым и всеми последующими членами. Движение S относительно G будет тогда строго эллиптическое, что существенно упростит задачу, так как движение Луны будет определяться системой шестого порядка (2.3), в которой x', y', z' суть известные функции t.

Уравнения (2.3) напишем теперь так:
$$\ddot{\xi} = \partial V/\partial\xi, \quad \ddot{\eta} = \partial V/\partial\eta, \quad \ddot{\zeta} = \partial V/\partial\zeta, \tag{2.9}$$
где
$$V = k^2\frac{T+L}{r} + k^2\frac{T+L}{L}\frac{m'}{r_1} + k^2\frac{T+L}{T}\frac{m'}{\Delta}.$$

Введем прямоугольную геоцентрическую систему координат $Txyz$, у которой плоскость Txy параллельна эклиптике (т. е. плоскости той орбиты, которую S описывает вокруг G) и которая вращается вокруг оси Tz с постоянной угловой скоростью n', равной среднему угловому движению Солнца. Уравнения (2.9) заменятся такими (см. § 3 гл. XV):
$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} - n'^2x &= \partial V/\partial x, \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} - n'^2y &= \partial V/\partial y, \\ \ddot{z} &= \partial V/\partial z. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Если воспользоваться разложениями (2.6) и (2.7), то будем иметь
$$V = \frac{k^2(T+L)}{r} + \frac{k^2m'}{r'}\sum_2^\infty \varkappa_n\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos H'), \tag{2.11}$$
где
$$\varkappa_n = \left(\frac{T}{T+L}\right)^{n-1} - \left(\frac{-L}{T+L}\right)^{n-1}.$$

Член k^2m'/r', не зависящий от координат Луны, здесь опущен. Множители
$$\begin{aligned} &\varkappa_2 = 1, \\ &\varkappa_3 = (T^2 - L^2)/(T+L)^2 = 0{,}975\,675, \\ &\varkappa_4 = (T^3 + L^3)/(T+L)^3 = 0{,}963\,957, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$
близки к единице.

Обозначим через a' большую полуось эллиптической орбиты Солнца, т. е. величину, определяемую равенством

$$n'^2 a'^3 = k^2 (T + L + m'), \tag{2.12}$$

и положим

$$T + L + m' = (m').$$

Поскольку $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \ldots$, разложение (2.11) можно будет написать так:

$$V = \frac{k^2 (T+L)}{r} + n'^2 \frac{(m')}{m'} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 r^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2 H' - \frac{1}{2}\right) + \ldots \tag{2.13}$$

Начнем с нахождения тех неравенств в движении Луны, которые не зависят от параллакса Солнца. Для этого удалим Солнце на бесконечность, увеличив соответствующим образом его массу: пусть a' и m' стремятся к бесконечности таким образом, что сохраняется равенство (2.12).

Так как $r' \to \infty$, то сумма всех ненаписанных членов в выражении (2.13), равная

$$n'^2 \frac{(m')}{m'} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \frac{r^3}{r'} \sum_{3}^{\infty} \varkappa_n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-3} P_n(\cos H')$$

обратится в нуль и это выражение примет вид

$$k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{1}{2} n'^2 \left(\lim \frac{a'}{r'}\right)^3 (3r^2 \cos^2 H' - r^2). \tag{2.14}$$

Для облегчения начального этапа решения задачи выделим еще более узкую группу неравенств, а именно те неравенства, которые не зависят не только от параллакса Солнца, но и от его эксцентриситета e'.

Если $e' = 0$, то вектор GS вращается равномерно, с угловой скоростью n', около точки G. Направим ось Tx параллельно этому вектору. При таком выборе осей

$$r \cos H' = x,$$

а так как при $e' = 0$, очевидно, $\lim(a'/r') = 1$, то выражение (2.14) обратится в

$$V_1 = k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{1}{2} n'^2 (3x^2 - r^2),$$

или

$$V_1 = k^2 \frac{T+L}{r} - \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m^2 (n - n')^2 (3x^2 - z^2). \tag{2.15}$$

Через m здесь обозначено отношение

$$m = \frac{n'}{n - n'}$$

среднего сидерического движения Солнца n' к среднему синодическому движению Луны $n - n'$.

Полагая

$$V = V_1 + (n - n')^2 \Omega,$$

мы можем написать уравнения (2.10) так:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2n'\dot{y} &= (n - n')^2 [-\varkappa x r^{-3} + 3m^2 x + \partial\Omega/\partial x],\\
\ddot{y} + 2n'\dot{x} &= (n - n')^2 [-\varkappa y r^{-3} + \partial\Omega/\partial y],\\
\ddot{z} &= (n - n')^2 [-\varkappa z r^{-3} - m^2 z + \partial\Omega/\partial z],
\end{aligned}$$

где

$$\varkappa = k^2 (T + L)(n - n')^{-2}.$$

Обозначим через τ время, измеряемое в таких единицах, что синодическое обращение Луны равно 2π. Так как $d\tau = (n - n')\,dt$, то уравнения движения Луны примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + \varkappa x r^{-3} - 3m^2 x &= \partial\Omega/\partial x,\\
\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} + \varkappa y r^{-3} &= \partial\Omega/\partial y,\\
\frac{d^2z}{d\tau^2} + \varkappa z r^{-3} + m^2 z &= \partial\Omega/\partial z.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Решение этих уравнений при $\Omega = 0$ дает промежуточную орбиту, уже включающую значительную часть возмущений. Влияние отдельных членов разложения величины Ω, которая играет здесь роль возмущающей функции, учитывается дополнительно. Это дает полное решение основной проблемы теории движения Луны.

Примечание. За невозмущенное (со стороны планет) движение Солнца можно с очень большой точностью принять эллиптическое движение, даваемое уравнениями (2.8), в которых U' заменено через $k^2(T+L+m')r'^{-1}$.

Хилл [1878a] показал, что для перехода от этого эллиптического движения к тому реальному, которое имеет Солнце под влиянием притяжения Луны, нужно эллиптическую среднюю аномалию уменьшить на $0'',001 \sin 2D$, а эллиптический радиус-вектор умножить на

$$1{,}0000000200 + 0{,}0000000003 \cos 2D.$$

Через D здесь обозначена разность средних долгот Луны и Солнца.

Стоящие здесь периодические члены не производят заметного действия. Постоянный член вызывает ощутимое увеличение большой полуоси земной орбиты, так как он соответствует уменьшению среднего годового движения Солнца на $0'',03895$.