§ 3. Вариационная кривая

В предыдущем параграфе было показано, что солнечные неравенства в движении Луны даются уравнениями (2.16).

Решение этих уравнений естественно начать с того простейшего случая, когда $\Omega=0$. В этом случае уравнения (2.16) обращаются в уравнения, уже рассмотренные нами при изучении движений в ограниченной задаче трех тел, происходящих вблизи конечной массы (§ 10 гл. XV).

Вследствие малости наклона лунной орбиты координата z настолько мала, что можно сделать еще одно упрощение: положить $z=0$, т. е. считать, что Луна движется в плоскости эклиптики.

Для этого частного случая, когда движение определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2}-2m\frac{dy}{d\tau}+\varkappa xr^{-3}-3m^2x=0,\\ &\frac{d^2y}{d\tau^2}+2m\frac{dx}{d\tau}+\varkappa yr^{-3}\qquad\quad\;=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Хилл нашел, как мы видели (§ 12 гл. XV), периодическую орбиту:

$$\left.\begin{aligned} x&=A_1\cos\tau+A_3\cos 3\tau+A_5\cos 5\tau+\ldots,\\ y&=A_1'\sin\tau+A_3'\sin 3\tau+A_5'\sin 5\tau+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Эта орбита, получившая название **вариационной кривой**, симметрична относительно каждой из координатных осей. Начало счета времени τ, служащего параметром в уравнениях (3.2), выбрано так, что сизигии (пересечения с осью Tx) имеют место при $\tau=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \ldots$, а квадратуры (пересечения с осью Ty) имеют место при $\tau=\pm\pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \ldots$

Мы уже видели (§ 14 гл. XV), что для достаточно малых значений $|m|$ коэффициенты A_{2k+1}, A_{2k+1}' могут быть представлены в форме сходящихся рядов, расположенных по целым положительным степеням m и начинающихся членом с m^{2k}. Общий множитель всех этих коэффициентов a, даваемый формулами (14.4) и (14.6) гл. XV, зависит не только от m, но и от $\varkappa$. Этот множитель фиксирует размеры вариационной кривой, тогда как ее форма зависит только от m.

Ограничившись членами второй степени относительно m, будем иметь

$$x=a\left[\left(1-\frac{19}{16}m^2\right)\cos\tau+\frac{3}{16}m^2\cos 3\tau\right],$$

$$y=a\left[\left(1+\frac{19}{16}m^2\right)\sin\tau+\frac{3}{16}m^2\sin 3\tau\right].$$

Так как

$$\cos 3\tau = 4\cos^3\tau - 3\cos\tau = \cos\tau\,(1 - 4\sin^2\tau),$$
$$\sin 3\tau = 3\sin\tau - 4\sin^3\tau = \sin\tau\,(-1 + 4\cos^2\tau),$$

то в пределах принятой точности уравнения вариационной кривой можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{a}\cos\tau\left(1 - m^2 - \frac{3}{4}m^2\sin^2\tau\right), \\ y &= \mathrm{a}\sin\tau\left(1 + m^2 + \frac{3}{4}m^2\cos^2\tau\right). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Это показывает, что вариационная кривая, имеющая для бесконечно малых значений $|m|$ форму окружности, принимает при возрастании $|m|$ форму, близкую к эллипсу, с центром в начале координат и с отношением осей, равным $(1-m^2)/(1+m^2)$, причем малая ось совпадает с линией сизигий, а большая — с линией квадратур.

Заметим, что уравнения (3.3) дают для радиуса-вектора выражение

$$r = \mathrm{a}\,[1 - m^2\cos 2\tau + O\,(m^3)], \tag{3.4}$$

воспроизводящее, как легко убедиться, основной член вариации (§ 1). Покажем, что движение по вариационной кривой воспроизводит также и вариацию в долготе Луны.

Обозначим через v истинную долготу Луны, а через λ и λ' — средние долготы Луны и Солнца. Благодаря сделанному нами выбору переменной τ будем иметь

$$\tau = \lambda - \lambda',$$

а потому

$$v - \lambda = v - \lambda' - \tau.$$

Рассмотрим выражения

$$r\cos(v - \lambda) = x\cos\tau + y\sin\tau,$$
$$r\sin(v - \lambda) = y\cos\tau - x\sin\tau,$$

где

$$x = r\cos(v - \lambda'), \quad y = r\sin(v - \lambda')$$

не что иное, как координаты Луны в употребляемой нами вращающейся системе координат.

Подставив сюда разложения (3.2), написанные в форме (§ 12 гл. XV)

$$x = \mathrm{a}\,[(1 + a_{-1})\cos\tau + (a_1 + a_{-2})\cos 3\tau + \ldots],$$
$$y = \mathrm{a}\,[(1 - a_{-1})\sin\tau + (a_1 - a_{-2})\sin 3\tau + \ldots],$$

получим

$$\left.\begin{aligned} r\cos(v-\lambda) &= \mathrm{a}\,[1+(a_1+a_{-1})\cos 2\tau+(a_2+a_{-2})\cos 4\tau+\ldots], \\ r\sin(v-\lambda) &= \mathrm{a}\,[*+(a_1-a_{-1})\sin 2\tau+(a_2-a_{-2})\sin 4\tau+\ldots]. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Эти уравнения дают движение Луны, соответствующее рассматриваемому нами частному решению системы (3.1). Чтобы вывести из них долготу Луны, можно воспользоваться разложением

$$v-\lambda=\operatorname{tg}(v-\lambda)-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(v-\lambda)+\ldots$$

При помощи указанных выше значений коэффициентов a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2} (§ 14 гл. XV), получим

$$v=\lambda+\left(\frac{11}{8}m^2+\frac{13}{6}m^3+\ldots\right)\sin 2\tau+\ldots \tag{3.6}$$

Это выражение действительно воспроизводит те неравенства в долготе Луны, которые носят название вариации (§ 1).

Вариационная кривая для Луны была вычислена Хиллом [1878], принявшим следующие значения средних годовых движений Луны и Солнца:

$$n=17\,325\,594'',06085, \quad n'=1\,295\,977'',41516,$$

что дает

$$m=n'/(n-n')=0{,}0808489338\,08311\,6.$$

Это же значение m было затем положено Брауном в основу созданной им теории движения Луны.

Уравнения вариационной кривой имеют здесь такой вид:

$$\begin{aligned} x/\mathrm{a} = &+0{,}99130\ \ 42530\ \ 38460\cos\tau+ \\ &+0{,}00151\ \ 58712\ \ 70049\cos 3\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 58811\ \ 16971\cos 5\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00300\ \ 43916\cos 7\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00001\ \ 75332\cos 9\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00000\ \ 01107\cos 11\tau+ \\ &+0{,}0000\ \ 00000\ \ 00007\cos 13\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y/\mathrm{a} = &+1{,}00869\ \ 57469\ \ 61540\sin\tau+ \\ &+0{,}00151\ \ 55436\ \ 89077\sin 3\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 58761\ \ 96185\sin 5\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00300\ \ 19348\sin 7\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00001\ \ 75204\sin 9\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00000\ \ 01107\sin 11\tau+ \\ &+0{,}00000\ \ 00000\ \ 00007\sin 13\tau. \end{aligned}$$

Формула (14.6) гл. XV дает

$$\mathrm{a}/a = 0{,}99909\ \ 31419\ \ 75298.$$

Наконец, формулы (3.5), служащие для вычисления радиуса-вектора и долготы, имеют здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} r\cos(v-\lambda) = \mathrm{a}\,[1 &- 0{,}00718\ \ 00394\ \ 81977\cos 2\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 60424\ \ 47064\cos 4\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00324\ \ 92024\cos 6\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00001\ \ 87552\cos 8\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00000\ \ 01171\cos 10\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00000\ \ 00008\cos 12\tau], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} r\sin(v-\lambda) = \mathrm{a}\,[* &+ 0{,}01021\ \ 14544\ \ 41102\sin 2\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 57148\ \ 66093\sin 4\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00275\ \ 71239\sin 6\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00001\ \ 62985\sin 8\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00000\ \ 01042\sin 10\tau + \\ &+ 0{,}00000\ \ 00000\ \ 00007\sin 12\tau]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Эти выражения показывают, что все возмущения, вводимые в радиус-вектор и долготу присутствием в уравнениях (3.1) величины m, являются π-периодическими функциями τ, т. е. вариационными неравенствами.

§ 4. Вариационные орбиты

Вариационная кривая представляет частное решение уравнений (3.1), зависящее только от одной произвольной постоянной, а именно от начала счета τ.

Чтобы достаточно приблизиться к реальному движению Луны, необходимо взять более общее решение уравнений (3.1), нежели вариационная кривая. В самом деле, при $m=0$, когда эти уравнения обращаются в уравнения задачи двух тел и поэтому дают для Луны эллиптическую орбиту, вариационная кривая обращается, как мы видели, в окружность. Таким образом, вариационную кривую можно рассматривать как круговую орбиту Луны, деформированную притяжением Солнца.

Общее решение уравнений (3.1), заключающее четыре произвольные постоянные, назовем **вариационной орбитой**. Наша задача заключается прежде всего в нахождении таких вариационных орбит, которые при $m=0$ обращаются в эллиптические орбиты с очень малыми эксцентриситетами. Будем считать, что квадратом эксцентриситета можно пренебречь. Соот-