Формула (14.6) гл. XV дает

$$\mathrm{a}/a = 0{,}99909\ 31419\ 75298.$$

Наконец, формулы (3.5), служащие для вычисления радиуса-вектора и долготы, имеют здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} r\cos(v-\lambda) = \mathrm{a}\,[1 &- 0{,}00718\ 00394\ 81977\cos 2\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 60424\ 47064\cos 4\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00324\ 92024\cos 6\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00001\ 87552\cos 8\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00000\ 01171\cos 10\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00000\ 00008\cos 12\tau], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} r\sin(v-\lambda) = \mathrm{a}\,[* &+ 0{,}01021\ 14544\ 41102\sin 2\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 57148\ 66093\sin 4\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00275\ 71239\sin 6\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00001\ 62985\sin 8\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00000\ 01042\sin 10\tau +\\ &+ 0{,}00000\ 00000\ 00007\sin 12\tau]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Эти выражения показывают, что все возмущения, вводимые в радиус-вектор и долготу присутствием в уравнениях (3.1) величины m, являются π-периодическими функциями τ, т. е. вариационными неравенствами.

§ 4. Вариационные орбиты

Вариационная кривая представляет частное решение уравнений (3.1), зависящее только от одной произвольной постоянной, а именно от начала счета τ.

Чтобы достаточно приблизиться к реальному движению Луны, необходимо взять более общее решение уравнений (3.1), нежели вариационная кривая. В самом деле, при $m=0$, когда эти уравнения обращаются в уравнения задачи двух тел и поэтому дают для Луны эллиптическую орбиту, вариационная кривая обращается, как мы видели, в окружность. Таким образом, вариационную кривую можно рассматривать как круговую орбиту Луны, деформированную притяжением Солнца.

Общее решение уравнений (3.1), заключающее четыре произвольные постоянные, назовем **вариационной орбитой**. Наша задача заключается прежде всего в нахождении таких вариационных орбит, которые при $m=0$ обращаются в эллиптические орбиты с очень малыми эксцентриситетами. Будем считать, что квадратом эксцентриситета можно пренебречь. Соответствующая вариационная орбита даст неравенства порядка первой степени эксцентриситета лунной орбиты.

Обозначим через x, y координаты произвольной точки P вариационной кривой (3.2), а через $x+\delta x$, $y+\delta y$ координаты точки P' близкой вариационной орбиты для того же значения τ. Приращения δx, δy будем рассматривать как величины бесконечно малые, т. е. будем пренебрегать квадратами и произведениями этих величин.

Введя для сокращения письма обозначение $D \equiv d/d\tau$, напишем уравнения (3.1) так:

$$D^2x - 2mDy = \partial F/\partial x; \quad D^2y + 2mDx = \partial F/\partial y, \tag{4.1}$$

где

$$F = \varkappa r^{-1} + \frac{3}{2}m^2x^2.$$

Подставим в уравнения (4.1) координаты точек P' и P; почленное вычитание полученных равенств даст

$$D^2\delta x - 2mD\delta y = \frac{\partial}{\partial x}\delta F; \quad D^2\delta y + 2mD\delta x = \frac{\partial}{\partial y}\delta F, \tag{4.2}$$

где

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y.$$

Обозначим через V скорость точки P. Тогда

$$V^2 = (Dx)^2 + (Dy)^2, \tag{4.3}$$

$$Dx = V\cos\psi, \quad Dy = V\sin\psi, \tag{4.4}$$

где через ψ обозначен угол, образуемый скоростью с осью x.

Вместо δx, δy примем за неизвестные тангенциальное и нормальное смещения точки P' относительно P. Обозначив эти смещения соответственно через δT и δN, будем иметь

$$\delta x = \delta T\cos\psi - \delta N\sin\psi; \quad \delta y = \delta T\sin\psi + \delta N\cos\psi. \tag{4.5}$$

Интеграл Якоби для уравнений (4.1) имеет вид

$$V^2 = 2F - C.$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только тех смежных орбит, для которых постоянная C имеет такое же значение, как для вариационной кривой. При этом условии применение к интегралу Якоби операции, приведшей от уравнений (4.1) к соотношениям (4.2), дает

$$Dx \cdot D\delta x + Dy \cdot D\delta y = \delta F. \tag{4.6}$$

Подставим в это равенство выражения (4.4) и (4.5). Так как

$$\left.\begin{aligned} D\delta x &= D\delta T\cos\psi - \delta T\sin\psi D\psi - D\,\delta N\sin\psi + \delta N\cos\psi D\psi, \\ D\delta y &= D\delta T\sin\psi + \delta T\cos\psi D\psi + D\,\delta N\cos\psi - \delta N\sin\psi D\psi, \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

то соотиошение (4.6) заменится таким:

$$V(D\delta T - \delta N D\psi) = \delta F. \tag{4.8}$$

С другой стороны, из равенств (4.4) находим

$$V^2 D\psi = D^2 y Dx - D^2 x Dy,$$

или, пользуясь уравнениями (4.1) и учитывая (4.3),

$$V^2 D\psi = -2mV^2 + \frac{\partial F}{\partial y} Dx - \frac{\partial F}{\partial x} Dy.$$

Подставим сюда выражения (4.4). Так как

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial F}{\partial y}\cos\psi - \frac{\partial F}{\partial x}\sin\psi; \quad \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\psi, \tag{4.9}$$

то это даст

$$V(D\psi + 2m) = \frac{\partial F}{\partial N}. \tag{4.10}$$

Дифференцирование интеграла Якоби дает

$$VDV = DF,$$

а так как, на основании (4.4) и (4.9),

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x} Dx + \frac{\partial F}{\partial y} Dy = V\frac{\partial F}{\partial T},$$

то

$$DV = \frac{\partial F}{\partial T}. \tag{4.11}$$

Вернемся теперь к соотношению (4.8), которое можно написать так:

$$V(D\delta T - \delta N\cdot D\psi) = \frac{\partial F}{\partial T}\delta T + \frac{\partial F}{\partial N}\delta N.$$

При помощи соотношеиий (4.10) и (4.11) исключим отсюда частные производные функции F. Это даст уравнение

$$D\delta T - V^{-1}DV\cdot\delta T = 2(D\psi + m)\delta N, \tag{4.12}$$

устанавливающее зависимость между смещениями δT и δN.

Обратимся теперь к уравнениям (4.2). Если их умножить на $-\sin\psi$ и $+\cos\psi$, а затем сложить, то получим, учитывая (4.9),

$$-\sin\psi D^2\delta x+\cos\psi D^2\delta y+[\sin\psi D\,\delta y+\cos\psi D\,\delta x]=$$
$$=\frac{\partial\,\delta F}{\partial y}\cos\psi-\frac{\partial\,\delta F}{\partial x}\sin\psi=\frac{\partial\,\delta F}{\partial N}. \quad (4.13)$$

Формулы (4.7) показывают, что

$$\sin\psi D\,\delta y+\cos\psi D\,\delta x=D\,\delta T-\delta N\cdot D\psi.$$

Эти же формулы показывают, что

$$-\sin\psi D\,\delta x+\cos\psi D\,\delta y=D\,\delta N+\delta T\cdot D\psi.$$

Дифференцируя это равенство и снова пользуясь формулами (4.7), получим

$$-\sin\psi D^2\delta x+\cos\psi D^2\delta y=D^2\delta N+$$
$$+2D\,\delta T\cdot D\psi-\delta N\,(D\psi)^2+\delta T\cdot D^2\psi.$$

Все эти преобразования позволяют заменить уравнение (4.13) таким:

$$[D^2-(D\psi)^2-2mD\psi]\,\delta N+D^2\psi\cdot\delta T+2(D\psi+m)\,D\,\delta T=\frac{\partial\,\delta F}{\partial N}. \quad (4.14)$$

Приведение этого уравнения к нужному нам виду начнем с преобразования его второй части. Прежде всего мы можем написать:

$$\frac{\partial\,\delta F}{\partial N}=\delta\frac{\partial F}{\partial N}=\frac{\partial^2F}{\partial N^2}\,\delta N+\frac{\partial^2F}{\partial N\,\partial T}\,\delta T. \quad (4.15)$$

Дифференцирование первого из равенств (4.9) дает

$$D\frac{\partial F}{\partial N}=-\frac{\partial F}{\partial T}D\psi+D\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\cos\psi-D\frac{\partial F}{\partial x}\sin\psi=$$
$$=-\frac{\partial F}{\partial T}D\psi+V\left[\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)\cos\psi\sin\psi+\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\cos 2\psi\right].$$

Но повторное применение формул (4.9) показывает, что

$$\frac{\partial^2F}{\partial N\,\partial T}=\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)\cos\psi\sin\psi+\frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}\cos 2\psi.$$

Поэтому

$$D\frac{\partial F}{\partial N}=-\frac{\partial F}{\partial T}D\psi+V\frac{\partial^2F}{\partial N\,\partial T}.$$

Это соотношение позволяет представить формулу (4.15) в таком виде:

$$\frac{\partial\,\delta F}{\partial N}=\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}\,\delta N+\frac{\delta T}{V}\left(D\,\frac{\partial F}{\partial N}+\frac{\partial F}{\partial T}\,D\psi\right).$$

Воспользовавшись формулами (4.10) и (4.11), легко найдем, что

$$\frac{\partial\,\delta F}{\partial N}=\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}\,\delta N+D^2\psi\cdot\delta T+2\,(D\psi+m)\,\frac{DV}{V}\,\delta T.$$

Таково окончательное выражение правой части уравнения (4.14). Теперь это уравнение можно написать так:

$$\left[D^2-(D\psi)^2-2mD\psi-\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}\right]\delta N+2(D\psi+m)\left(D\,\delta T-\frac{DV}{V}\,\delta T\right)=0.$$

Исключим отсюда δT, воспользовавшись соотношением (4.12). Это даст для нахождения δN уравнение

$$D^2\delta N+\Theta\,\delta N=0, \tag{4.16}$$

где

$$\Theta=3\,(D\psi+m)^2+m^2-\partial^2 F/\partial N^2. \tag{4.17}$$

После того как решение этого уравнения даст δN, из уравнения (4.12) получим δT. Этим заканчивается нахождение орбит, близких к вариационной кривой. Так как решение уравнений (4.16) и (4.12) вводит три новые произвольные постоянные в дополнение к той, которая уже была в вариационной кривой, то мы получаем общее решение системы (4.1), т. е. все вариационные орбиты, бесконечно близкие к вариационной кривой (3.2).

Такой способ нахождения решений, бесконечно близких к частному решению, применим ко всем уравнениям вида (4.1), в которых функция F не зависит от времени и для которых, следовательно, существует интеграл Якоби.

Для нахождения величины (4.17) в функции τ могут служить формулы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}&=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\sin^2\psi-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\sin\psi\cos\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos^2\psi,\\ D\psi&=(D^2y\cdot Dx-D^2x\cdot Dy)\left[(Dx)^2+(Dy)^2\right]^{-2},\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

легко получаемые из (4.3), (4.4) и (4.9).

Координаты x и y, даваемые формулами (3.2), не меняются или только меняют знак, если τ заменить через $-\tau$, или через $\tau+\pi$. Поэтому выражение

$$F=\varkappa\,(x^2+y^2)^{-1/2}+\frac{3}{2}\,m^2x^2$$

есть четная, π-периодическая функция τ. Этими же свойствами обладают, очевидно, и выражения (4.18). Таким образом, фуикция (4.17) разлагается в ряд вида

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + 2q_2 \cos 4\tau + \ldots \tag{4.19}$$

Уравнение (4.16), у которого коэффициент Θ имеет вид (4.19), называется *уравнением Хилла*.

В рассматриваемом нами случае, когда x и y даются рядами (3.2), коэффициенты разложения (4.19) зависят только от m. Хилл [1894] получил для этих коэффициентов следующие выражения:

$$\begin{aligned}
q^2 &= 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 + \frac{255}{32} m^4 + 19m^5 + \frac{80}{3} m^6 + \\
&\quad + \frac{533}{2\cdot 3^2} m^7 + \frac{11\,230\,225}{2^{13}\cdot 3^3} m^8 + \frac{1\,576\,037}{2^7\cdot 3^4} m^9 + \\
&\quad + \frac{49\,359\,583}{2^9\cdot 3^5} m^{10} + \frac{720\,508\,007}{2^8\cdot 3^6\cdot 5} m^{11} + \ldots, \\
q_1 &= -\frac{15}{2} m^2 - \frac{57}{4} m^3 - 11 m^4 - \frac{23}{2\cdot 3} m^5 - \frac{68\,803}{2^9\cdot 3^2} m^6 - \\
&\quad - \frac{1\,792\,417}{2^{10}\cdot 3^3} m^7 - \frac{7\,172\,183}{2^7\cdot 3^4\cdot 5} m^8 - \frac{596\,404\,499}{2^9\cdot 3^5\cdot 5^2} m^9 - \\
&\quad - \frac{2\,641\,291\,011\,773}{2^{17}\cdot 3^6\cdot 5^3} m^{10} + \ldots, \\
q_2 &= + \frac{111}{16} m^4 + \frac{1397}{2^6} m^5 + \frac{8807}{2^4\cdot 3\cdot 5} m^6 + \frac{319\,003}{2^5\cdot 3^2\cdot 5^2} m^7 + \\
&\quad + \frac{252\,382\,507}{2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^3} m^8 + \ldots, \\
q_3 &= -\frac{11\,669}{2^9} m^6 + \ldots
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Однако в тех случаях, когда требуется особенно большая точность, употребление численного метода (§ 13 гл. XV) гораздо скорее ведет к цели. Именно таким путем Хилл получил для указанного выше значения m (§ 3) разложение:

$$\begin{aligned}
\Theta = \;& 1{,}15884\ 39395\ 96583\ - \\
& -0{,}11408\ 80374\ 93807 \cos 2\tau + \\
& +0{,}00076\ 64759\ 95109 \cos 4\tau - \\
& -0{,}00001\ 83465\ 77790 \cos 6\tau + \\
& +0{,}00000\ 01088\ 95009 \cos 8\tau - \\
& -0{,}00000\ 00020\ 98671 \cos 10\tau + \\
& +0{,}00000\ 00000\ 12103 \cos 12\tau - \\
& -0{,}00000\ 00000\ 00211 \cos 14\tau.
\end{aligned}$$

Уравнение Хилла приобрело впоследствии большое значение в математической физике и явилось предметом многих исследований. Мы изложим в следующих параграфах решение этого уравнения, данное Хиллом [1877].