§ 5. Решение уравнения Хилла

Уравнение Хилла имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\Theta x=0, \tag{5.1}$$

где

$$\Theta=q^2+2q_1\cos 2\tau+2q_2\cos 4\tau+\ldots \tag{5.2}$$

есть π-периодическая функция.

Рассмотрим прежде всего некоторые свойства этого уравнения, являющиеся частными случаями свойств, присущих линейным уравнениям с периодическими коэффициентами. Эти свойства являются следствием того факта, что каждому решению $x(\tau)$ уравнения (5.1) соответствует другое решение, имеющее вид $x(\tau+\pi)$.

Таким образом, если через $g(\tau)$ и $h(\tau)$ обозначить линейно независимые решения уравнения (5.1), то должны иметь место равенства

$$\left.\begin{aligned} g(\tau+\pi)&=\alpha g(\tau)+\beta h(\tau),\\ h(\tau+\pi)&=\gamma g(\tau)+\delta h(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

где α, β, γ, δ не зависят от τ.

Покажем, что уравнение (5.1) имеет решение $F(\tau)$, удовлетворяющее условию

$$F(\tau+\pi)=\nu F(\tau), \tag{5.4}$$

где ν — постоянный множитель.

Полагая

$$F(\tau)=Ag(\tau)+Bh(\tau), \tag{5.5}$$

найдем, что A, B и ν должны удовлетворять соотношению (аргумент τ опускаем)

$$A(\alpha g+\beta h)+B(\gamma g+\delta h)=\nu(Ag+Bh).$$

Так как g и h линейно независимы, то отсюда следует, что

$$A(\alpha-\nu)+B\gamma=0, \quad A\beta+B(\delta-\nu)=0.$$

Поскольку оба коэффициента, A и B, не могут быть равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} \alpha-\nu, & \gamma \\ \beta, & \delta-\nu \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\nu^2-(\alpha+\delta)\nu+(\alpha\delta-\beta\gamma)=0. \tag{5.6}$$

Каждый из корней этого уравнения дает решение, удовлетворяющее условию (5.4).

Легко убедиться, что корни уравнения (5.6) не зависят от выбора частных решений $g(\tau)$ и $h(\tau)$. Возьмем решения, определяемые начальными условиями:

$$g(0)=1, \quad g'(0)=0; \quad h(0)=0, \quad h'(0)=1. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.1) дает

$$g\frac{d^2h}{d\tau^2}-h\frac{d^2g}{d\tau^2}=0,$$

откуда, интегрируя и пользуясь начальными условиями, получим

$$g(\tau)h'(\tau)-g'(\tau)h(\tau)=1.$$

В этом равенстве положим $\tau=\pi$ и воспользуемся соотношениями (5.3). Это даст

$$g(\pi)=\alpha, \quad g'(\pi)=\beta; \quad h(\pi)=\gamma, \quad h'(\pi)=\delta, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Таким образом, корни уравнения (5.6) можно обозначить через ν и ν^{-1}, причем $\nu+\nu^{-1}=\alpha+\delta$.

С другой стороны, равенство (5.4) при $\tau=0$ и $\tau=-\pi$ дает

$$F(\pi)=\nu F(0), \quad F(-\pi)=\nu^{-1}F(0),$$

откуда

$$\nu+\nu^{-1}=\frac{F(\pi)+F(-\pi)}{F(0)}.$$

Легко убедиться, что $g(\tau)$ есть четная функция τ, тогда как $h(\tau)$ — нечетная. Поэтому из равенства (5.5) следует, что

$$F(\pi)=Ag(\pi)+Bh(\pi); \quad F(-\pi)=Ag(\pi)-Bh(\pi).$$

Так как, кроме того, $F(0)=A$, то

$$\nu+\nu^{-1}=2g(\pi), \tag{5.8}$$

откуда

$$\nu=g(\pi)\pm\{[g(\pi)]^2-1\}^{1/2}.$$

В рассматриваемом нами случае, когда коэффициенты ряда (5.2) даются формулами (4.20), уравнение (5.1) имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\left(1+2m-\frac{1}{2}m^2+\ \ldots\ -15m^2\cos 2\tau-\ \ldots\right)x=0.$$

Таким образом,

$$g(\tau)=\cos(1+m)\tau+O(m^2)$$

и потому $|g(\pi)|<1$, если только $|m|$ достаточно мало́. В этом случае, имеющем место для Луны, целесообразно положить

$$\nu=\exp(ic\pi) \quad (i=\sqrt{-1}),$$

где через c обозначено вещественное число. Для малых значений $|m|$ это число близко к единице.

Очевидно,

$$\exp[ic(\tau+\pi)] = \nu \exp(ic\tau),$$

откуда следует, что выражение

$$\Phi(\tau) = \frac{F(\tau)}{\exp(ic\tau)}$$

является π-периодической функцией τ.

Поэтому, введя вместо τ переменную

$$\zeta = \exp(i\tau),$$

будем иметь

$$\Phi(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k},$$

а решение уравнения Хилла, удовлетворяющее условию (5.4), примет вид

$$x(\tau) = \Phi(\tau)\exp(ic\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+c}. \tag{5.9}$$

Поскольку уравнение (5.1) не меняется при замене τ через $-\tau$, функция $x(-\tau)$ будет другим частным решением этого уравнения. Решения $x(\tau)$ и $x(-\tau)$ образуют, как легко проверить, фундаментальную систему во всех случаях, кроме тех, когда c есть целое число.

Таким образом, во всех интересующих нас случаях полное решение уравнения Хилла приводится к нахождению величины c и коэффициентов b_k, входящих в выражение (5.9).

Примечание I. Уравнение (5.8) показывает, что для нахождения величины c достаточно вычислить значения функции $g(\tau)$, определяемой уравнением (5.1) и начальными условиями (5.7). в интервале $[0, \pi]$. Для этого могут быть использованы методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Примечание II. Когда показатель c в выражении (5.9) имеет вещественное значение, вариационная кривая является устойчивым периодическим решением задачи Хилла. Такого рода случай имеет место, как уже было отмечено, при изучении движения Луны.

§ 6. Уравнение, дающее показатель c

Если в уравнении Хилла (5.1) взять за независимую переменную ζ, то оно примет вид

$$-\zeta \frac{d}{d\zeta}\left(\zeta \frac{dx}{d\zeta}\right) + \Theta x = 0, \tag{6.1}$$