где через c обозначено вещественное число. Для малых значений $|m|$ это число близко к единице.

Очевидно,

$$\exp[ic(\tau+\pi)] = \nu \exp(ic\tau),$$

откуда следует, что выражение

$$\Phi(\tau) = \frac{F(\tau)}{\exp(ic\tau)}$$

является π-периодической функцией τ.

Поэтому, введя вместо τ переменную

$$\zeta = \exp(i\tau),$$

будем иметь

$$\Phi(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k},$$

а решение уравнения Хилла, удовлетворяющее условию (5.4), примет вид

$$x(\tau) = \Phi(\tau)\exp(ic\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+c}. \tag{5.9}$$

Поскольку уравнение (5.1) не меняется при замене τ через $-\tau$, функция $x(-\tau)$ будет другим частным решением этого уравнения. Решения $x(\tau)$ и $x(-\tau)$ образуют, как легко проверить, фундаментальную систему во всех случаях, кроме тех, когда c есть целое число.

Таким образом, во всех интересующих нас случаях полное решение уравнения Хилла приводится к нахождению величины c и коэффициентов b_k, входящих в выражение (5.9).

Примечание I. Уравнение (5.8) показывает, что для нахождения величины c достаточно вычислить значения функции $g(\tau)$, определяемой уравнением (5.1) и начальными условиями (5.7). в интервале $[0, \pi]$. Для этого могут быть использованы методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Примечание II. Когда показатель c в выражении (5.9) имеет вещественное значение, вариационная кривая является устойчивым периодическим решением задачи Хилла. Такого рода случай имеет место, как уже было отмечено, при изучении движения Луны.

§ 6. Уравнение, дающее показатель c

Если в уравнении Хилла (5.1) взять за независимую переменную ζ, то оно примет вид

$$-\zeta \frac{d}{d\zeta}\left(\zeta \frac{dx}{d\zeta}\right) + \Theta x = 0, \tag{6.1}$$

причем

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_h \cos 2h\tau = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_h \zeta^{2h},$$

где $q_0 = q^2$, $q_{-h} = q_h$. Этот ряд мы будем считать абсолютно сходящимся.

Подстановка выражения (5.9) в (6.1) дает

$$-\sum_k b_k (2k + c)^2 \zeta^{2k+c} + \sum_h \sum_l q_h b_l \zeta^{2h+2l+c} = 0.$$

Приравняв нулю коэффициент при ζ^{2k+c}, получим систему уравнений, которую можно написать так:

$$[q^2 - (2k + c)^2]\, b_k + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' q_{k-l} b_l = 0 \tag{6.2}$$

$$(k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots;\ l \neq k).$$

Несмотря иа то, что мы имеем здесь бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных b_k, Хилл применил к этой системе теоремы, доказанные для конечных систем линейных уравнений. Законность такого применения в рассматриваемом случае была обоснована Пуанкаре, который развил с этой целью теорию бесконечных определителей.

Рассмотрим прежде всего тот простейший частный случай, когда $q_1 = q_2 = \ldots = 0$. Здесь уравнения (6.2) имеют вид

$$[q^2 - (2k + c)^2]\, b_k = 0.$$

Единственное решение этой системы, в котором не все коэффициенты b_k равны нулю, таково:

$$c = -2n \pm q; \quad b_k = 0 \qquad (k \neq n)$$

где n — произвольное целое число.

Уравнение Хилла имеет в этом случае два решения,

$$b_n \zeta^q, \qquad b_n \zeta^{-q},$$

образующие фундаментальную систему.

Обратимся теперь к интересующему нас случаю, когда $q_1, q_2, \ldots$ не равны нулю, но очень малы и быстро стремятся к нулю. Здесь ни одно из выражений

$$q^2 - (2k + c)^2$$

не равно нулю и уравнения (6.2) можно написать так:

$$b_k + \sum_l{}' \frac{q_{k-l}}{q^2 - (2k + c)^2} b_l = 0. \tag{6.3}$$

Положим

$$a_{k,k}=\delta_{k,k},\quad a_{k,i}=\delta_{k,i}+\frac{q_{k-i}}{q^2-(2k+c)^2}\qquad (i\neq k),$$

где, как обычно,

$$\delta_{k,k}=1,\quad \delta_{k,i}=0\qquad (i\neq k).$$

Уравнения (6.3) примут тогда вид

$$\sum_i a_{k,i}b_i=0. \tag{6.4}$$

Если двойной ряд $\sum_{k,i}|a_{k,i}-\delta_{k,i}|$ сходится, то бесконечный определитель, составленный из коэффициентов $a_{k,i}$ системы (6.4), называется нормальным. Пуанкаре показал, что системы (6.4), имеющие нормальный определитель, обладают в отношении ограниченных систем решений теми же свойствами, что и конечные системы. Система решений называется ограниченной, если существует такое число A, что $|b_k|<A$.

Легко убедиться, что система (6.4) имеет нормальный определитель. В самом деле, так как

$$\sum_{k,i}|a_{k,i}-\delta_{k,i}|<2\sum_j|q_j|\sum_k\left|\frac{1}{q^2-(2k+c)^2}\right|,$$

где оба стоящие справа ряда сходятся, то и двойной ряд сходится.

Таким образом, система (6.4) только в том случае имеет решение, не равное тождествеино нулю, когда определитель, составленный из коэффициентов $a_{k,i}$, равен нулю. Обозначим этот определитель через $\Delta(c)$.

Стоящая перед нами задача нахождения функции

$$x=\sum b_k\zeta^{2k+c},$$

удовлетворяющей уравнению Хилла, распадается на две. Сначала надо найти корни уравнения

$$\Delta(c)=0. \tag{6.5}$$

Затем для полученных значений c из уравнений (6.4) надо найти коэффициенты b_k.

Рассмотрим функцию $\Delta(z)$ комплексного переменного z. Легко убедиться, что эта функция голоморфна для всех значений z, кроме

$$z=\pm q-2k. \tag{6.6}$$

В самом деле, для всех значений z, кроме (6.6), определитель $\Delta(z)$ является нормальным. Он является поэтому пределом, к которому равномерно сходится последовательность конечных определителей, вырезаемых из бесконечного и симметричных относительно центрального члена $a_{0,0}$. Но каждый такой конечный определитель есть голоморфная функция z.

Итак, единственные точки, которые могут быть особыми, это точки (6.6). Покажем, что каждая из них является для функции $\Delta(z)$ полюсом первого порядка.

В самом деле, рассмотрим строку

$$\ldots, \frac{q_1}{q^2-(2k+z)^2}, \quad 1, \quad \frac{q_1}{q^2-(2k+z)^2}, \ldots \tag{6.7}$$

определителя $\Delta(z)$. Каждый член этой строки, кроме центрального, имеет в точках (6.6) полюс первого порядка. Для членов всех остальных строк эти точки являются обыкновенными. Но при развертывании определителя $\Delta(z)$ мы получим сходящийся ряд, каждый член которого будет иметь множителем один и только один член строки (6.7).

Заметим, далее, что мероморфная функция $\Delta(z)$ обладает следующими свойствами:

$$\Delta(-z)=\Delta(z); \quad \Delta(z+2)=\Delta(z). \tag{6.8}$$

Четность этой функции следует из того, что строка (6.7) не меняется при одновременном изменении знаков k и z. С другой стороны, при замене z через $z+2$ результат исключения b_k из уравнений (6.4) не меняется, ибо от замены k на $k-1$ эта система не меняется, вследствие чего, если $\mathbf{c}$ есть корень уравнения (6.5), то $\mathbf{c}+2$ будет также удовлетворять этому уравнению.

Отсюда следует, что все нули функции $\Delta(z)$ даются равенством

$$z=\pm\mathbf{c}-2k, \tag{6.9}$$

где k — произвольное целое число.

Отметим еще одно свойство этой функции. Положим $z=x+y\sqrt{-1}$ и заставим y стремиться к $\pm\infty$. Все члены строки (6.7), за исключением центрального, равного единице, обратятся в нули. В пределе все члены определителя, кроме стоящих на главной диагонали, обратятся в нули. Таким образом, при $y\to\pm\infty$ будем иметь

$$\lim\Delta\left(x+y\sqrt{-1}\right)=1.$$

Покажем, что рассмотренные нами свойства достаточны для того, чтобы найти функцию $\Delta(z)$.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$(\cos\pi z-\cos\pi\mathbf{c})/(\cos\pi z-\cos\pi q),$$

имеющую те же самые полюса (6.6) и те же самые нули (6.9), что и функция $\Delta(z)$. Легко убедиться, что при $y \to \pm\infty$ эта функция тоже стремится к единице.

Из всего сказанного следует, что отношение рассматриваемых функций, равное

$$\Delta(z)(\cos \pi z - \cos \pi q)/(\cos \pi z - \cos \pi c)$$

есть целая функция с периодом 2, стремящаяся к единице, когда $y \to \pm\infty$. Такая функция, остающаяся ограниченной на всей плоскости переменного z, равняется, как известно, постоянной величине, а эта последняя необходимо равняется единице.

Итак,

$$\Delta(z) = \frac{\cos \pi z - \cos \pi c}{\cos \pi z - \cos \pi q}.$$

При $z=0$ это равенство дает

$$\sin^2(\pi c/2) = \Delta(0)\sin^2(\pi q/2). \tag{6.10}$$

Таким образом, задача нахождения корней уравнения (6.5) приведена к гораздо более простой задаче вычисления $\Delta(0)$, так как решение уравнения (6.10) не представляет уже никаких трудностей.

Делая $z=1/2$, или $z=1$, или $z=q$, получим другие, аналогичные (6.10), уравнения, также могущие служить для нахождения величины c.

§ 7. Вычисление определителя $\Delta(0)$

Положим

$$\beta_k = 1/(q^2-4k^2).$$

Тогда определитель $\Delta(0)$ примет вид

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots, & 1, & \beta_{k-1}q_1, & \beta_{k-1}q_2, & \ldots \\ \ldots, & \beta_k q_1, & 1, & \beta_k q_1, & \ldots \\ \ldots, & \beta_{k+1}q_2, & \beta_{k+1}q_1, & 1, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

Формулы (4.20) показывают, что при рассматриваемых нами малых значениях $|m|$ коэффициент q_α есть величина порядка 2α относительно m.

Покажем, что справедливо следующее утверждение:

Если $Aq_\alpha q_\beta \ldots q_\lambda$ есть какой-либо член разложения определителя (7.1), то сумма индексов

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda$$

равна четному числу.