имеющую те же самые полюса (6.6) и те же самые нули (6.9), что и функция $\Delta(z)$. Легко убедиться, что при $y\to\pm\infty$ эта функция тоже стремится к единице.

Из всего сказанного следует, что отношение рассматриваемых функций, равное

$$\Delta(z)(\cos\pi z-\cos\pi q)/(\cos\pi z-\cos\pi c)$$

есть целая функция с периодом 2, стремящаяся к единице, когда $y\to\pm\infty$. Такая функция, остающаяся ограниченной на всей плоскости переменного z, равняется, как известно, постоянной величине, а эта последняя необходимо равняется единице.

Итак,

$$\Delta(z)=\frac{\cos\pi z-\cos\pi c}{\cos\pi z-\cos\pi q}.$$

При $z=0$ это равенство дает

$$\sin^2(\pi c/2)=\Delta(0)\sin^2(\pi q/2). \tag{6.10}$$

Таким образом, задача нахождения корней уравнения (6.5) приведена к гораздо более простой задаче вычисления $\Delta(0)$, так как решение уравнения (6.10) не представляет уже никаких трудностей.

Делая $z=1/2$, или $z=1$, или $z=q$, получим другие, аналогичные (6.10), уравнения, также могущие служить для нахождения величины c.

§ 7. Вычисление определителя $\Delta(0)$

Положим

$$\beta_k=1/(q^2-4k^2).$$

Тогда определитель $\Delta(0)$ примет вид

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots, & 1, & \beta_{k-1}q_1, & \beta_{k-1}q_2, & \ldots \\ \ldots, & \beta_k q_1, & 1, & \beta_k q_1, & \ldots \\ \ldots, & \beta_{k+1}q_2, & \beta_{k+1}q_1, & 1, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

Формулы (4.20) показывают, что при рассматриваемых нами малых значениях $|m|$ коэффициент q_α есть величина порядка 2α относительно m.

Покажем, что справедливо следующее утверждение:

Если $Aq_\alpha q_\beta\ldots q_\lambda$ есть какой-либо член разложения определителя (7.1), то сумма индексов

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda$$

равна четному числу.

Для доказательства заменим во всех членах выражения (7.1) величины q_α через $q_\alpha z^\alpha$ и покажем, что полученный таким образом определитель, который мы обозначим через $\Delta(0, z)$, есть четная функция z. Действительно, для получения $\Delta(0, -z)$ надо в выражении $\Delta(0, z)$ сначала переменить знаки у всех столбцов через один, затем — у всех строк через одну. А так как число строк и столбцов, меняющих знаки, в каждом из конечных определителей, пределом которых является $\Delta(0, z)$, одинаково, то при такой перемене знаков определитель не изменится.

Отсюда непосредственно вытекает, что разложение определителя (7.1) состоит из членов, порядок каждого из которых относительно $\mathfrak{m}$ делится на 4.

Так, например, если отбросить члены 12-го порядка, то сумма индексов может равняться только 0, 2, 4, и мы будем иметь

$$\Delta(0) = 1 + Aq_1^2 + Bq_1^4 + Cq_1^2 q_2 + Dq_2^2.$$

Легко видеть, что

$$Aq_1^2 = \sum_k \begin{vmatrix} 0, & \beta_{k-1}q_1 \\ \beta_k q_1, & 0 \end{vmatrix} = -q_1^2 \sum_k \beta_{k-1}\beta_k,$$

$$Bq_1^4 = \sum_k \sum_l \begin{vmatrix} 0, & \beta_{k-1}q_1 \\ \beta_k q_1, & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0, & \beta_{l-1}q_1 \\ \beta_l q_1, & 0 \end{vmatrix} = q_1^4 \sum_k \sum_l \beta_{k-1}\beta_k\beta_{l-1}\beta_l.$$

В последнем равенстве k не может равняться l, $l-1$, $l+1$. Поэтому

$$B = A^2 - \sum_l \beta_{l-1}^2\beta_l^2 - 2\sum_l \beta_{l-1}\beta_l^2\beta_{l+1}.$$

Коэффициенты $A, B, \ldots$ весьма просто выражаются через q. Например,

$$A = -\sum_k \beta_{k-1}\beta_k = -\sum_k \frac{1}{16\left[\frac{1}{4}q^2 - (k-1)^2\right]\left[\frac{1}{4}q^2 - k^2\right]} =$$

$$= \sum_k \frac{1}{16q(q+1)}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}q + k} + \frac{1}{\frac{1}{2}q - k + 1}\right) -$$

$$- \sum_k \frac{1}{16q(q-1)}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}q - k} - \frac{1}{\frac{1}{2}q + k - 1}\right) =$$

$$= \sum_k \frac{1}{4q(1-q^2)} \frac{1}{\frac{1}{2}q + k} = \frac{1}{4q(1-q^2)}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}q} + q\sum_1^\infty \frac{1}{\frac{1}{4}q^2 - k^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4q(1-q^2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}.$$

Хилл [1877] вычислил все члены разложения $\Delta(0)$, порядок которых относительно m меньше 16. Полученный им результат таков:

$$\Delta(0)=1+\frac{\pi}{4q}\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}\left[\frac{q_1^2}{1-q^2}+\frac{q_2^2}{4-q^2}+\frac{q_3^2}{9-q^2}\right]+$$

$$+\frac{\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{32q(1-q^2)^2}\left[\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi q}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{2}{1-q^2}+\frac{9}{2(4-q^2)}\right]q_1^4+$$

$$+\frac{3\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{8q(1-q^2)(4-q^2)}\,q_1^2q_2+$$

$$+\frac{\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{128q(1-q^2)^3}\left[\left(-\frac{1}{q^2}+\frac{2}{1-q^2}+\frac{9}{2(4-q^2)}\right)\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi q}{q}-\frac{25}{8q^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{q^4}+\frac{2}{1-q^2}+\frac{4}{(1-q^2)^2}-\frac{9}{8(4-q^2)}+\frac{9}{(4-q^2)^2}-\frac{4}{9-q^2}-\frac{\pi^2}{3q^2}\right]q_1^6+$$

$$+\frac{3\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{32q(1-q^2)^2(4-q^2)}\left[\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi q}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{2}{1-q^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{4-q^2}+\frac{20}{3(9-q^2)}\right]q_1^4q_2+$$

$$+\frac{\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{16q(1-q^2)(4-q^2)}\left[\frac{\pi\operatorname{ctg}\pi q}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{2}{1-q^2}+\frac{2}{4-q^2}+\frac{10}{9-q^2}\right]q_1^2q_2^2+$$

$$+\frac{(7-3q^2)\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{4q(1-q^2)(4-q^2)(9-q^2)}\,q_1q_2q_3+\frac{5\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi q}{2}}{16q(1-q^2)(4-q^2)(9-q^2)}\,q_1^3q_3.$$

Подставив сюда значения q, q_1, q_2, ..., соответствующие принятому значению m (§ 3), Хилл получил:

Член нулевого порядка	$+1{,}00000\ 00000\ 00000\ 0$
Член 4-го порядка	$+0{,}00180\ 46110\ 93422\ 7$
Сумма членов 8-го порядка . . .	$+0{,}00000\ 01808\ 63109\ 9$
Сумма членов 12-го порядка . . .	$+0{,}00000\ 00000\ 64478\ 6$
$\Delta(0)=$	$+1{,}00180\ 47920\ 21011\ 2$

Рассмотрение характера убывания членов различных порядков позволяет думать, что первые 13 десятичных знаков при дальнейших приближениях не изменятся.

Решение уравнения (6.10) дает

$$c=1{,}07158\ 32774\ 160.$$

Если в формулу, дающую $\Delta(0)$, подставить выражения (4.20) для q^2, q_1, q_2, ..., то можно получить $\Delta(0)$ и c в виде явных функций m. Хилл нашел, что

$$\begin{aligned} c = 1 + m - \frac{3}{4} m^2 - \frac{201}{32} m^3 - \frac{2367}{2^7} m^4 - \frac{111\,749}{2^{11}} m^5 - \\ - \frac{4\,095\,991}{2^{13}\cdot 3} m^6 - \frac{332\,532\,037}{2^{16}\cdot 3^2} m^7 - \\ - \frac{15\,106\,211\,789}{2^{18}\cdot 3^3} m^8 - \frac{5\,975\,332\,916\,861}{2^{23}\cdot 3^4} m^9 - \\ - \frac{1\,547\,804\,933\,375\,567}{2^{25}\cdot 3^5\cdot 5} m^{10} - \frac{818\,293\,211\,836\,767\,367}{2^{28}\cdot 3^6\cdot 5^2} m^{11} - \ldots \end{aligned} \qquad (7.2)$$

В указанном выше мемуаре этот ряд был дан без двух последних членов. Нахождение членов с m^{10} и m^{11} составляет содержание особого мемуара [Хилл, 1894].

§ 8. Вычисление коэффициентов

Для нахождения коэффициентов b_k, входящих в решение

$$x(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+1},$$

мы имеем систему уравнений (6.2), которую можно написать так:

$$b_k + \sum_i{}' \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k + c)^2} b_i = 0. \qquad (8.1)$$

Здесь i и k принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем $i \neq k$.

После того как показатель c найден, решение системы (8.1) не представляет затруднений, если, как это предполагается, коэффициенты b_k ограничены по абсолютной величине, а $|m|$ есть достаточно малая величина. В этом случае каждый член уравнения (8.1) будет быстро стремиться к нулю при возрастании абсолютной величины $|q^2 - (2k+c)^2|$ знаменателя и абсолютной величины $|k - i|$ индекса коэффициента q_{k-i}. Поэтому искомые коэффициенты b_k также будут быстро приближаться к нулю при возрастаниях $|k|$.

Замена бесконечных уравнений (8.1) конечными, содержащими наиболее значительные члены, позволяет легко получить численные значения b_k. Для нахождения общих выражений этих коэффициентов можно поступить следующим образом.

В определителе $\Delta(z)$, состоящем из строк (6.7), заменим нулевую строку, соответствующую значению $k=0$, неопределенными величинами

$$\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$$