функций m. Хилл нашел, что

$$\begin{aligned}\mathrm{c} = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{201}{32}m^3 - \frac{2367}{2^7}m^4 - \frac{111\,749}{2^{11}}m^5 - \\ - \frac{4\,095\,991}{2^{13}\cdot 3}m^6 - \frac{332\,532\,037}{2^{16}\cdot 3^2}m^7 - \\ - \frac{15\,106\,211\,789}{2^{18}\cdot 3^3}m^8 - \frac{5\,975\,332\,916\,861}{2^{23}\cdot 3^4}m^9 - \\ - \frac{1\,547\,804\,933\,375\,567}{2^{25}\cdot 3^5\cdot 5}m^{10} - \frac{818\,293\,211\,836\,767\,367}{2^{28}\cdot 3^6\cdot 5^2}m^{11} - \ldots \quad (7.2)\end{aligned}$$

В указанном выше мемуаре этот ряд был дан без двух последних членов. Нахождение членов с m^{10} и m^{11} составляет содержание особого мемуара [Хилл, 1894].

§ 8. Вычисление коэффициентов

Для нахождения коэффициентов b_k, входящих в решение

$$x(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+1},$$

мы имеем систему уравнений (6.2), которую можно написать так:

$$b_k + \sum_i{}' \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k + \mathrm{c})^2} b_i = 0. \quad (8.1)$$

Здесь i и k принимают все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, причем $i \neq k$.

После того как показатель с найден, решение системы (8.1) не представляет затруднений, если, как это предполагается, коэффициенты b_k ограничены по абсолютной величине, а $|m|$ есть достаточно малая величина. В этом случае каждый член уравнения (8.1) будет быстро стремиться к нулю при возрастании абсолютной величины $|q^2 - (2k+\mathrm{c})^2|$ знаменателя и абсолютной величины $|k - i|$ индекса коэффициента q_{k-i}. Поэтому искомые коэффициенты b_k также будут быстро приближаться к нулю при возрастаниях $|k|$.

Замена бесконечных уравнений (8.1) конечными, содержащими наиболее значительные члены, позволяет легко получить численные значения b_k. Для нахождения общих выражений этих коэффициентов можно поступить следующим образом.

В определителе $\Delta(z)$, состоящем из строк (6.7), заменим нулевую строку, соответствующую значению $k=0$, неопределенными величинами

$$\ldots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots$$

Полученный таким образом новый определитель, который мы обозначим через $D(z)$, будет сходиться, если выполняется условие $|x_i|<A$, где A не зависит от i.

Развертывание $D(z)$ по элементам нулевой строки дает

$$D(z)= \ldots +x_{-1}B_{-1}(z)+x_0B_0(z)+x_1B_1(z)+ \ldots, \tag{8.2}$$

где $B_k(z)$ — мероморфные функции z, имеющие те же полюсы (6.6), как и функция $\Delta(z)$, за исключением только точек $z=\pm q$.

Легко убедиться, что

$$b_k=B_k(\mathrm{c}). \tag{8.3}$$

Действительно, если в определителе $D(\mathrm{c})$ положить

$$x_i=\frac{q_{k-i}}{q^2-(2k+\mathrm{c})^2} \tag{8.4}$$

для всех $i\neq k$, а x_k заменить единицей, то получим $D(\mathrm{c})=0$. В самом деле, если $k\neq 0$, то определитель $D(\mathrm{c})$ будет иметь две одинаковые строки; если же $k=0$, то он обратится в $\Delta(\mathrm{c})$, а потому и в этом случае будет равняться нулю. Но при подстановке (8.4) выражение (8.2) обращается в (8.1), что и доказывает справедливость формулы (8.3).

Можно показать, что коэффициент b_k разлагается в ряд по целым положительным степеням m, причем ряд этот начинается членом степени $|2k|$ или $|2k|-1$.

§ 9. Важнейшие неравенства движения Луны

В § 5 было показано, что общее решение уравнения Хилла (4.16) можно представить в форме

$$\delta N=C_1\sum b_k\zeta^{2k+\mathrm{c}}+C_2\sum b_k\zeta^{-2k-\mathrm{c}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Это решение напишем так:

$$\delta N=(C_1+C_2)\left[\sum_0^{\infty} b_k\cos(2k+\mathrm{c})\tau+\sum_1^{\infty} b_{-k}\cos(2k-\mathrm{c})\tau\right]+$$
$$+i(C_1-C_2)\left[\sum_0^{\infty} b_k\sin(2k+\mathrm{c})\tau-\sum_1^{\infty} b_{-k}\sin(2k-\mathrm{c})\tau\right].$$

Положив

$$(C_1+C_2)\,b_0=A\cos\omega;\quad i(C_1-C_2)\,b_0=-A\sin\omega,$$

где A и ω — новые произвольные постоянные, получим

$$A^{-1}b_0\delta N=\sum_0^{\infty} b_k\cos[(2k+\mathrm{c})\tau+\omega]+\sum_1^{\infty} b_{-k}\cos[(2k-\mathrm{c})\tau-\omega]. \tag{9.1}$$