Полученный таким образом новый определитель, который мы обозначим через $D(z)$, будет сходиться, если выполняется условие $|x_i|<A$, где A не зависит от i.

Развертывание $D(z)$ по элементам нулевой строки дает

$$D(z)= \ldots +x_{-1}B_{-1}(z)+x_0B_0(z)+x_1B_1(z)+ \ldots, \tag{8.2}$$

где $B_k(z)$ — мероморфные функции z, имеющие те же полюсы (6.6), как и функция $\Delta(z)$, за исключением только точек $z=\pm q$.

Легко убедиться, что

$$b_k=B_k(\mathrm{c}). \tag{8.3}$$

Действительно, если в определителе $D(\mathrm{c})$ положить

$$x_i=\frac{q_{k-i}}{q^2-(2k+\mathrm{c})^2} \tag{8.4}$$

для всех $i\neq k$, а x_k заменить единицей, то получим $D(\mathrm{c})=0$. В самом деле, если $k\neq 0$, то определитель $D(\mathrm{c})$ будет иметь две одинаковые строки; если же $k=0$, то он обратится в $\Delta(\mathrm{c})$, а потому и в этом случае будет равняться нулю. Но при подстановке (8.4) выражение (8.2) обращается в (8.1), что и доказывает справедливость формулы (8.3).

Можно показать, что коэффициент b_k разлагается в ряд по целым положительным степеням m, причем ряд этот начинается членом степени $|2k|$ или $|2k|-1$.

§ 9. Важнейшие неравенства движения Луны

В § 5 было показано, что общее решение уравнения Хилла (4.16) можно представить в форме

$$\delta N=C_1\sum b_k\zeta^{2k+\mathrm{c}}+C_2\sum b_k\zeta^{-2k-\mathrm{c}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Это решение напишем так:

$$\delta N=(C_1+C_2)\left[\sum_0^{\infty} b_k\cos(2k+\mathrm{c})\tau+\sum_1^{\infty} b_{-k}\cos(2k-\mathrm{c})\tau\right]+$$
$$+i(C_1-C_2)\left[\sum_0^{\infty} b_k\sin(2k+\mathrm{c})\tau-\sum_1^{\infty} b_{-k}\sin(2k-\mathrm{c})\tau\right].$$

Положив

$$(C_1+C_2)b_0=A\cos\omega;\quad i(C_1-C_2)b_0=-A\sin\omega,$$

где A и ω — новые произвольные постоянные, получим

$$A^{-1}b_0\delta N=\sum_0^{\infty} b_k\cos[(2k+\mathrm{c})\tau+\omega]+\sum_1^{\infty} b_{-k}\cos[(2k-\mathrm{c})\tau-\omega]. \tag{9.1}$$

Вычислим первые коэффициенты b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, ограничившись членами не выше второго порядка.

Формулы (4.20) и (7.2) дают

$$q_1 = q_{-1} = -\frac{15}{2}m^2 - \frac{57}{4}m^3 - 11m^4 - \ldots,$$

$$q^2 - c^2 = \frac{225}{16}m^3 + \frac{3645}{64}m^4 + \ldots,$$

$$q^2 - (c+2)^2 = -8 - 4m + 3m^2 + \ldots;$$

$$q^2 - (c-2)^2 = 4m - 3m^2 + \ldots,$$

$$q^2 - (c+4)^2 = -24 - 8m + \ldots;$$

$$q^2 - (c-4)^2 = -8 + 8m - 6m^2 + \ldots$$

Система уравнений (6.2) принимает здесь такой вид:

$$[q^2 - c^2]\,b_0 + q_1 b_1 + q_1 b_{-1} = 0,$$

$$[q^2 - (c+2)^2]\,b_1 + q_1 b_0 = 0; \quad [q^2 - (c-2)^2]\,b_{-1} + q_1 b_0 = 0,$$

$$[q^2 - (c+4)^2]\,b_2 + q_1 b_1 = 0; \quad [q^2 - (c-4)^2]\,b_{-2} + q_1 b_{-1} = 0.$$

Таким образом, с принятой нами точностью получаем

$$b_1 = -\frac{15}{16}m^2 b_0; \quad b_{-1} = \left(\frac{15}{8}m + \frac{159}{32}m^2\right)b_0; \quad b_2 = b_{-2} = 0.$$

Подстановка этих значений в (9.1) дает

$$A^{-1}\,\delta N = -\frac{15}{16}m^2\cos[(c+2)\tau + \omega] + \cos(c\tau + \omega) + \\ + \left(\frac{15}{8}m + \frac{159}{32}m^2\right)\cos[(c-2)\tau - \omega] + \ldots \quad (9.2)$$

Обратимся теперь к уравнению (4.12), служащему для нахождения δT. С принятой нами точностью это уравнение имеет вид

$$\frac{d\,\delta T}{d\tau} + \frac{7}{2}m^2\sin 2\tau\cdot\delta T = 2\left(1 + m - \frac{5}{4}m^2\cos 2\tau\right)\delta N. \quad (9.3)$$

Чтобы еще больше упростить дальнейшие выкладки, опустим в (9.2) и (9.3) члены второго порядка. Эти соотношения дадут

$$\delta N = A\cos(c\tau + \omega) + \frac{15}{8}Am\cos[(c-2)\tau + \omega], \quad (9.4)$$

$$\delta T = 2A\sin(c\tau + \omega) - \frac{15}{4}Am\sin[(c-2)\tau + \omega] + B, \quad (9.5)$$

$$c = 1 + m - \frac{3}{4}m^2,$$

где через B обозначена новая постоянная.

Метод, примененный нами для нахождения δN и δT (§ 4), показывает, что мы должны рассматривать A и B как величины бесконечно малые.

Перейдем к вычислению величин δx и δy при помощи формул (4.5). Уравнения вариационной кривой (3.3) и соотношения (4.4) показывают, что

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \tau + O(m^2).$$

Таким образом, в пределах принятой точности имеем

$$\delta x = -\delta T \sin\tau - \delta N \cos\tau; \quad \delta y = \delta T \cos\tau - \delta N \sin\tau.$$

Подставив сюда выражения (9.4) и (9.5), прибавим полученные значения δx, δy к координатам x, y, даваемым формулами (3.3). Это даст следующие выражения для возмущенных координат Луны:

$$\begin{aligned} x = \mathrm{a}\cos\tau - B\sin\tau - \mathrm{a}m^2\left(1 + \frac{3}{4}\sin^2\tau\right)\cos\tau - \\ - A\left\{\frac{15}{8}m\cos[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]\cos\tau + \cos(\mathrm{c}\tau+\omega)\cos\tau - \right. \\ \left. - \frac{15}{4}m\sin[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]\sin\tau + 2\sin(\mathrm{c}\tau+\omega)\sin\tau\right\}, \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned} y = \mathrm{a}\sin\tau + B\cos\tau + \mathrm{a}m^2\left(1 + \frac{3}{4}\cos^2\tau\right)\sin\tau - \\ - A\left\{\frac{15}{8}m\cos[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]\sin\tau + \cos(\mathrm{c}\tau+\omega)\sin\tau + \right. \\ \left. + \frac{15}{4}m\sin[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]\cos\tau - 2\sin(\mathrm{c}\tau+\omega)\cos\tau\right\}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Бесконечно малую постоянную B заменим постоянной $\delta\tau_0$, также бесконечно малой, определяемой равенствами

$$\mathrm{a}\cos\tau - B\sin\tau = \mathrm{a}\cos(\tau+\delta\tau_0); \quad \mathrm{a}\sin\tau + B\cos\tau = \mathrm{a}\sin(\tau+\delta\tau_0).$$

Не меняя точности выражений (9.6) и (9.7), мы можем положить $\delta\tau_0=0$. В самом деле, в членах, стоящих в первых строках этих выражений, изменится при этом лишь начало счета τ, тогда как все остальные члены изменятся на величины второго порядка относительно A и $\delta\tau_0$.

Чтобы связать введенные нами величины с употребляемыми в астрономии, рассмотрим сначала предельный случай, когда $m=0$, и потому возмущающее действие Солнца исчезает. Выражения (9.6) и (9.7) обращаются здесь, как легко убедиться, в такие:

$$x = \mathrm{a}\cos\tau - \frac{3}{2}A\cos\omega + \frac{1}{2}A\cos(2\tau+\omega),$$

$$y = \mathrm{a}\sin\tau + \frac{3}{2}A\sin\omega + \frac{1}{2}A\sin(2\tau+\omega).$$

Повернем оси координат на угол ω. Новые координаты

$$x' = x\cos\omega - y\sin\omega, \quad y' = x\sin\omega + y\cos\omega$$

будут равны:

$$x' = -\frac{3}{2}A + \mathbf{a}\cos(\tau+\omega) + \frac{1}{2}A\cos 2(\tau+\omega),$$

$$y' = \mathbf{a}\sin(\tau+\omega) + \frac{1}{2}A\sin 2(\tau+\omega).$$

Сопоставим эти выражения с формулами, дающими орбитальные координаты в эллиптическом движении (§ 5 гл. VI), а именно:

$$\xi = a(\cos E - e) = a\left(-\frac{3}{2}e + \cos M + \frac{e}{2}\cos 2M + \ldots\right),$$

$$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E = a\left(\sin M + \frac{e}{2}\sin 2M + \ldots\right).$$

Тогда получим

$$\mathbf{a} = a, \quad A = ae, \quad \tau+\omega = M,$$

причем фигурирующая здесь величина a определяется равенством

$$n^2a^3 = k^2(T+L),$$

где через n обозначено найденное из наблюдения среднее движение Луны.

В возмущенном движении, когда $m \neq 0$, имеем (§ 14 гл. XV и § 7 гл. XXI)

$$\mathbf{a} = a\left(1 - \frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{3}m^3 + \frac{407}{2304}m^4 + \ldots\right), \tag{9.8}$$

$$\mathbf{c} = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{201}{32}m^3 - \frac{2367}{128}m^4 + \ldots, \tag{9.9}$$

причем роль средней аномалии играет величина $\mathbf{c}\tau+\omega$. Положим

$$\mathbf{c}\tau + \omega = nt + \varepsilon - \Pi, \tag{9.10}$$

где через $nt+\varepsilon$ обозначена средняя долгота Луны, а через Π — долгота перигея.

Дифференцирование этого равенства дает

$$\frac{d\Pi}{dt} = n - \mathbf{c}(n-n') = n\left(1 - \frac{\mathbf{c}}{1+m}\right). \tag{9.11}$$

Таким образом, та часть движения перигея, которая не зависит от эксцентриситетов Луны и Солнца, будучи выражена в частях среднего движения Луны n, равна

$$\frac{1}{n}\frac{d\Pi}{dt}=\frac{3}{4}m^2+\frac{177}{32}m^3+\frac{1659}{2^7}m^4+\frac{85205}{2^{11}}m^5+\frac{3073531}{2^{13}\cdot 3}m^6+ \\ +\frac{258\,767293}{2^{16}\cdot 3^2}m^7+\frac{12001004273}{2^{18}\cdot 3^3}m^8+\frac{4823236506653}{2^{23}\cdot 3^4}m^9+ \\ +\frac{1258410742976387}{2^{25}\cdot 3^5\cdot 5}m^{10}+\frac{66728\,39226\,79600\,927}{2^{28}\cdot 3^6\cdot 5^2}m^{11}+\ \ldots \qquad (9.12)$$

Величину (9.10), являющуюся одним из главных аргументов лунных неравенств, можно представить в другом виде. Так как τ есть разность средних долгот Луны и Солнца, то

$$\tau=nt+\varepsilon-(n't+\varepsilon')=(n-n')t+\beta,$$

где $\beta=\varepsilon-\varepsilon'$. Поэтому

$$\mathrm{c}\tau+\omega=\mathrm{c}(n-n')t+\mathrm{c}\beta+\omega.$$

Введя, далее, величину

$$c=\frac{\mathrm{c}}{1+m}=1-\frac{3}{4}m^2-\frac{177}{32}m^3-\ \ldots,$$

будем иметь

$$\mathrm{c}\tau+\omega=cnt-\pi, \qquad (9.13)$$

где $\pi=-\mathrm{c}\beta-\omega$.

Обозначим через r и v радиус-вектор и долготу Луны, а через $v'=n't+\varepsilon'$ среднюю долготу Солнца. Тогда

$$r\cos(v-v')=x, \quad r\sin(v-v')=y, \qquad (9.14)$$

где x и y даются формулами (9.6) и (9.7), в которых мы можем, не уменьшая их точности, положить $A=ae$, $B=0$.

Равенства (9.14), (9.6), (9.7) дают

$$r^2=\mathrm{a}^2\left\{1-2e\cos(\mathrm{c}\tau+\omega)-2m^2\cos 2\tau-\frac{15}{4}me\cos[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]\right\}$$

откуда, учитывая (9.8), получим

$$r=a\left\{1-\frac{1}{6}m^2-e\cos(\mathrm{c}\tau+\omega)-\right. \\ \left.-\frac{15}{8}me\cos[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]-m^2\cos 2\tau\right\}. \qquad (9.15)$$

Почленное деление равенств (9.6) и (9.7) на (9.15) приводит к соотношениям:

$$\cos(v-v')=\cos\tau\left\{1-\frac{11}{4}m^2\sin^2\tau\right\}+ \\ +\sin\tau\left\{\frac{15}{4}me\sin[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]-2e\sin(\mathrm{c}\tau+\omega)\right\},$$

$$\sin(v-v')=\sin\tau\left\{1+\frac{11}{4}m^2\cos^2\tau\right\}- \\ -\cos\tau\left\{\frac{15}{4}me\sin[(\mathrm{c}-2)\tau+\omega]-2e\sin(\mathrm{c}\tau+\omega)\right\}.$$

Очевидная комбинация этих равенств дает

$$\sin(v - v' - \tau) =$$
$$= \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] + 2e \sin(c\tau + \omega),$$

откуда, замечая, что

$$v - v' - \tau = v - (nt + \varepsilon),$$

будем иметь

$$v = nt + \varepsilon + 2e \sin(c\tau + \omega) - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau =$$
$$= nt + \varepsilon + 2e \sin(cnt - \pi) - \frac{15}{4} me \sin[(cn - 2n + 2n')t - \pi - 2\beta] +$$
$$+ \frac{11}{8} m^2 \sin[2(n - n')t + 2\beta]. \quad (9.16)$$

Первые периодические члены в выражениях (9.15) и (9.16) представляют, очевидно, главные части эллиптических неравенств соответствующих координат; вторые периодические члены — главные части эвекции; последние члены дают главные части вариации.

Изложенный метод позволяет найти члены, имеющие множителем e, с точностью до любых степеней m. Однако вычисления быстро усложняются, и в тех случаях, когда нужно принимать во внимание высокие степени m, приходится отказаться от вывода буквенных выражений неравенств и пользоваться численными значениями коэффициентов b_k.

Точно так же для той части движения перигея, которая зависит только от m, формула (9.11) и численное значение c (§ 7) сразу дают

$$\frac{1}{n} \frac{d\Pi}{dt} = 0{,}00857\,25730\,04864,$$

где только последний знак не вполне надежен. Заметим, что ряд (9.12), хотя и доведенный Хиллом [1894] до 11-й степени m, не может дать такой точности. В рассматриваемом случае последний написанный член этого ряда, равный 0,00000 01045 25170, еще очень далек от 10^{-15}.

§ 10. Неравенства, зависящие от m и e

В предыдущих параграфах была подробно рассмотрена та часть используемой в настоящее время теории движения Луны, которая была создана Хиллом. Хилл положил в основу теории упрощенную систему дифференциальных уравнений (3.1),