Очевидная комбинация этих равенств дает

$$\sin(v - v' - \tau) =$$
$$= \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] + 2e \sin(c\tau + \omega),$$

откуда, замечая, что

$$v - v' - \tau = v - (nt + \varepsilon),$$

будем иметь

$$v = nt + \varepsilon + 2e \sin(c\tau + \omega) - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau =$$
$$= nt + \varepsilon + 2e \sin(cnt - \pi) - \frac{15}{4} me \sin[(cn - 2n + 2n')t - \pi - 2\beta] +$$
$$+ \frac{11}{8} m^2 \sin[2(n - n')t + 2\beta]. \quad (9.16)$$

Первые периодические члены в выражениях (9.15) и (9.16) представляют, очевидно, главные части эллиптических неравенств соответствующих координат; вторые периодические члены — главные части эвекции; последние члены дают главные части вариации.

Изложенный метод позволяет найти члены, имеющие множителем e, с точностью до любых степеней m. Однако вычисления быстро усложняются, и в тех случаях, когда нужно принимать во внимание высокие степени m, приходится отказаться от вывода буквенных выражений неравенств и пользоваться численными значениями коэффициентов b_k.

Точно так же для той части движения перигея, которая зависит только от m, формула (9.11) и численное значение c (§ 7) сразу дают

$$\frac{1}{n}\frac{d\Pi}{dt} = 0{,}00857\,25730\,04864,$$

где только последний знак не вполне надежен. Заметим, что ряд (9.12), хотя и доведенный Хиллом [1894] до 11-й степени m, не может дать такой точности. В рассматриваемом случае последний написанный член этого ряда, равный 0,00000 01045 25170, еще очень далек от 10^{-15}.

§ 10. Неравенства, зависящие от m и e

В предыдущих параграфах была подробно рассмотрена та часть используемой в настоящее время теории движения Луны, которая была создана Хиллом. Хилл положил в основу теории упрощенную систему дифференциальных уравнений (3.1), имеющую вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m\frac{dy}{d\tau} + \varkappa x r^{-3} - 3m^2 x &= 0, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m\frac{dx}{d\tau} + \varkappa y r^{-3} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

Исходя из открытого им частного периодического решения системы (10.1), он построил общее решение этой системы, но при существенном ограничении: постоянная интегрирования e в решении Хилла рассматривается как величина бесконечно малая, квадратом которой можно пренебречь (§§ 4—9).

Обобщив метод неопределенных коэффициентов, употребленный Хиллом, Браун снял указанное ограничение и нашел все неравенства в движении Луны, зависящие от m и e, т. е. общее решение системы (10.1). Форма решения, включающего все такие неравенства, была подсказана теорией Понтекулана [1829—1846], в которой рассматриваемые неравенства были получены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} a/r &= \sum_i \sum_p B_{i,p} \cos(2i\tau + p\omega), \\ v - n't - \varepsilon' &= \tau + \sum_i \sum_p B'_{i,p} \sin(2i\tau + p\omega), \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

где i меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а $p = 0, 1, 2, \ldots$

Положим, как мы это уже делали,

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad s = x - y\sqrt{-1}, \quad \zeta = \exp\left(\tau\sqrt{-1}\right),$$

и введем опять символ $D \equiv \zeta\frac{d}{d\zeta}$; тогда уравнения (10.1) примут такой вид (§ 11 гл. XV):

$$\left.\begin{aligned} D^2u + 2m\,Du + \frac{3}{2}m^2(u+s) - \varkappa u r^{-3} &= 0, \\ D^2s - 2m\,Ds + \frac{3}{2}m^2(u+s) - \varkappa s r^{-3} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Нами было найдено периодическое решение этой системы, представляемое вариационной кривой (§§ 12 и 13 гл. XV)

$$u_0 = \mathbf{a}\sum a_k \zeta^{2k+1}; \quad s_0 = \mathbf{a}\sum a_{-k-1}\zeta^{2k+1}. \tag{10.4}$$

Решение, бесконечно близкое к решению (10.4), полученное в §§ 4—9, имеет вид

$$u = u_0 + \delta u; \quad s = s_0 + \delta s. \tag{10.5}$$

Соотношения (4.5) дают:

$$2\delta N=\left[\delta s\cdot\exp\left(\psi\sqrt{-1}\right)-\delta u\cdot\exp\left(-\psi\sqrt{-1}\right)\right]\sqrt{-1},$$

$$2\delta T=\delta s\cdot\exp\left(\psi\sqrt{-1}\right)+\delta u\cdot\exp\left(-\psi\sqrt{-1}\right),$$

тогда как соотношения (4.4) можно написать так:

$$V\exp\left(\psi\sqrt{-1}\right)=\sqrt{-1}\,Du_0;\quad V\exp\left(-\psi\sqrt{-1}\right)=\sqrt{-1}\,Ds_0. \tag{10.6}$$

Поэтому

$$V\,\delta u=\left(\sqrt{-1}\,\delta T-\delta N\right)Du_0;\quad V\,\delta s=\left(\sqrt{-1}\,\delta T+\delta N\right)Ds_0. \tag{10.7}$$

Найденное нами общее выражение для δN (§ 5 и § 9) напишем теперь так:

$$\delta N=\zeta_1^{\pm c}\sum b_k\zeta^{2k}, \tag{10.8}$$

где

$$\zeta_1=\exp\left[(\tau-\tau_1)\sqrt{-1}\right],$$

причем через τ_1 обозначена произвольная постоянная.

Соотношение (4.12), связывающее δT и δN, может быть написано следующим образом:

$$V\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\delta T}{V}\right)=2\left(\frac{d\psi}{d\tau}+m\right)\delta N,$$

а так как формулы (10.6) дают

$$V^2=-Du_0\cdot Ds_0;\quad 2\frac{d\psi}{d\tau}=\frac{D^2u_0}{Du_0}-\frac{D^2s_0}{Ds_0},$$

то отсюда легко заключить, что δT можно представить в той же форме (10.8), что и δN.

Так как $\delta u+\delta s=2\delta x$ есть вещественная величина, а $\delta u-\delta s=2\sqrt{-1}\,\delta y$ — величина мнимая, то из (10.7) вытекает, что имеют место разложения:

$$\delta u=\zeta_1^{\pm c}\zeta\sum b_k\zeta^{2k};\quad \delta s=\zeta_1^{\mp c}\zeta^{-1}\sum b_k\zeta^{-2k},$$

в которых коэффициенты b_k имеют одинаковые вещественные значения.

Учитывая выражения (10.4), рассматриваемое нами решение (10.5) можно представить рядами:

$$u=\mathrm{a}\zeta\sum_k\sum_p A_{k,p}\zeta^{2k}\zeta_1^{pc};\quad s=\mathrm{a}\zeta^{-1}\sum_k\sum_p A_{-k,-p}\zeta^{2k}\zeta_1^{pc}, \tag{10.9}$$

в которых k принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$, а p имеет только три значения: -1, 0, $+1$. В частности, если $p=0$, то $A_{k,0}=a_k$.

Если в разложениях (10.9) дать индексу p значения от $-\infty$ до $+\infty$ и вернуться к переменному τ, то получим ряды вида (10.2). Это обстоятельство и навело Брауна на мысль искать общее решение уравнений (10.3) в форме (10.9), распространив суммирование на все целые значения p. Покажем, что в рядах (10.9) коэффициенты A могут иметь такие значения, при которых эти ряды формально удовлетворяют уравнениям (10.3).

Так как

$$D(\zeta^{2k+1}\zeta_1^{pc}) = (2k+1+pc)\zeta^{2k+1}\zeta_1^{pc},$$

$$D(\zeta^{2k+1+pc}) = (2k+1+pc)\zeta^{2k+1+pc},$$

то результат подстановки рядов (10.9) в уравнения (10.3) и приравнивания коэффициентов будет такой же, как если бы мы предварительно положили $\zeta_1 = \zeta$.

Таким образом, выражения (10.9) мы можем заменить более простыми:

$$u = \mathrm{a}\sum\sum A_{k,p}\zeta^{2k+1+pc}; \quad s = \mathrm{a}\sum\sum A_{-k-1,-p}\zeta^{2k+1+pc}. \tag{10.10}$$

Нужно только помнить, что в окончательных результатах $\zeta^{2k+1+pc}$ должно быть заменено на

$$\exp\sqrt{-1}\,[(2k+1)\tau + pc(\tau-\tau_1)].$$

Подстановка рядов (10.10) в уравнения (10.3) дает для нахождения величины c и коэффициентов A следующую бесконечную систему уравнений:

$$\sum_k\sum_p A_{k,p}\{[2i+q\mathrm{c},\ 2k+p\mathrm{c}]\,A_{k-i,\,p-q} + {}$$
$$+ [2i+q\mathrm{c}]\,A_{i-k-1,\,q-p} + (2i+q\mathrm{c})\,A_{-i-k-1,\,-q-p}\} = 0. \tag{10.11}$$

Символы $[j,\ h]$, $[j]$ и (h) определяются теми же самыми формулами (13.3), как и раньше (§ 13 гл. XV).

Система (10.11), являющаяся обобщением системы (13.2), рассматривавшейся нами в гл. XV, легко решается способом последовательных приближений. Исходными значениями могут служить $A_{i,0} = a_i$, даваемые системой (13.2), и значение c, найденное выше (§§ 6 и 7). Новое значение c, полученное из уравнений (10.11), будет отличаться от прежнего на ту часть движения перигея, которая зависит от эксцентриситета лунной орбиты.

§ 11. Влияние наклона лунной орбиты

Наклон лунной орбиты к плоскости эклиптики, в которой движется Солнце, настолько мал, что целесообразно изучить сначала частный случай, когда этот наклон равен нулю, а потому и $z=0$. Это было сделано нами в предыдущих параграфах