Если в разложениях (10.9) дать индексу $p$ значения от $-\infty$ до $+\infty$ и вернуться к переменному $\tau$, то получим ряды вида (10.2). Это обстоятельство и навело Брауна на мысль искать общее решение уравнений (10.3) в форме (10.9), распространив суммирование на все целые значения $p$. Покажем, что в рядах (10.9) коэффициенты $A$ могут иметь такие значения, при которых эти ряды формально удовлетворяют уравнениям (10.3).

Так как

$$D(\zeta^{2k+1}\zeta_1^{pc}) = (2k+1+pc)\,\zeta^{2k+1}\zeta_1^{pc},$$
$$D(\zeta^{2k+1+pc}) = (2k+1+pc)\,\zeta^{2k+1+pc},$$

то результат подстановки рядов (10.9) в уравнения (10.3) и приравнивания коэффициентов будет такой же, как если бы мы предварительно положили $\zeta_1=\zeta$.

Таким образом, выражения (10.9) мы можем заменить более простыми:

$$u = \mathrm{a}\sum\sum A_{k,p}\zeta^{2k+1+pc};\quad s = \mathrm{a}\sum\sum A_{-k-1,-p}\zeta^{2k+1+pc}. \qquad (10.10)$$

Нужно только помнить, что в окончательных результатах $\zeta^{2k+1+pc}$ должно быть заменено на

$$\exp\sqrt{-1}\,[(2k+1)\tau + pc(\tau-\tau_1)].$$

Подстановка рядов (10.10) в уравнения (10.3) дает для нахождения величины $\mathrm{c}$ и коэффициентов $A$ следующую бесконечную систему уравнений:

$$\sum_k\sum_p A_{k,p}\{[2i+q\mathrm{c},\ 2k+p\mathrm{c}]\,A_{k-i,p-q} +$$
$$+[2i+q\mathrm{c}]\,A_{i-k-1,q-p} + (2i+q\mathrm{c})\,A_{-i-k-1,-q-p}\} = 0. \qquad (10.11)$$

Символы $[j, h]$, $[j]$ и $(h)$ определяются теми же самыми формулами (13.3), как и раньше (§ 13 гл. XV).

Система (10.11), являющаяся обобщением системы (13.2), рассматривавшейся нами в гл. XV, легко решается способом последовательных приближений. Исходными значениями могут служить $A_{i,0}=a_i$, даваемые системой (13.2), и значение $\mathrm{c}$, найденное выше (§§ 6 и 7). Новое значение $\mathrm{c}$, полученное из уравнений (10.11), будет отличаться от прежнего на ту часть движения перигея, которая зависит от эксцентриситета лунной орбиты.

## § 11. Влияние наклона лунной орбиты

Наклон лунной орбиты к плоскости эклиптики, в которой движется Солнце, настолько мал, что целесообразно изучить сначала частный случай, когда этот наклон равен нулю, а потому и $z=0$. Это было сделано нами в предыдущих параграфах в предположении, что эксцентриситет орбиты Солнца и его параллакс равны нулю. Сохраняя это предположение, обратимся теперь к изучению пространственного движения Луны, когда координата $z$ не равна тождественно нулю.

Вследствие сделанных ограничений, в исходных уравнениях (2.16) надо положить $\Omega=0$. Если вместо переменных $\tau$, $x$, $y$ воспользоваться опять переменными $\zeta$, $u$, $s$, то первые два из этих уравнений заменятся системой (10.3), тогда как третье уравнение примет вид

$$D^2z - z(m^2 + \varkappa r^{-3}) = 0, \tag{11.1}$$

причем

$$r^2 = us + z^2.$$

Если пренебречь величинами порядка $z^2$, то уравнения (10.3) не будут содержать $z$ и их общее решение, найденное в предыдущем параграфе, будет выражаться формулами (10.10). В этом случае уравнение (11.1) после подстановки значения $r^2 = us$, вытекающего из формул (10.10), даст соответствующее значение координаты $z$ в функции $\zeta$, $m$ и $e$.

Ограничимся получением той части координаты $z$, которая не зависит от $e$. Сообразно с этим, для $u$ и $s$ возьмем не общие выражения (10.9) или (10.10), а выражения (10.4), т. е. положим

$$u = \mathrm{a}\sum a_k\zeta^{2k+1}, \quad s = \mathrm{a}\sum a_k\zeta^{-2k-1}. \tag{11.2}$$

В этом случае

$$m^2 + \varkappa r^{-3} \sim m^2 + \varkappa (us)^{-3/2} \sim \sum M_l\zeta^{2l}, \tag{11.3}$$

причем $M_{-l} = M_l$ и $M_l = 0(m^{|2l|})$, как это следует из формул (11.2).

Таким образом, уравнение (11.1) принимает вид

$$D^2z - z\sum M_l\zeta^{2l} = 0,$$

или

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + z(M_0 + 2M_1\cos 2\tau + 2M_2\cos 4\tau + \ldots) = 0, \tag{11.4}$$

т. е. обращается в уравнение Хилла (§ 4).

Общее решение этого уравнения может быть представлено, как мы видели, в таком виде:

$$z = C_1\sum z_k\zeta^{2k+g} + C_2\sum z_k\zeta^{-2k-g}, \tag{11.5}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные. Характеристические показатели $g$ и $-g$ даются здесь уравнением

$$\sin^2(\pi g/2) = \Delta_1(0)\sin^2(\pi\sqrt{2M_0}/2), \tag{11.6}$$

аналогичным (6.10), причем бесконечный определитель $\Delta_1(0)$ получается из $\Delta(0)$ заменой $q^2$ на $M_0$ и $q_i$ на $M_i$. Коэффициенты $z_k$ находятся из уравнений

$$(\mathrm{g}+2k)^2 z_k - \sum_i M_{k-i} z_i = 0, \tag{11.7}$$

аналогичным уравнениям (6.2). Легко видеть, что при $k>0$

$$z_{-k} = 0(m^{2k-1}), \quad z_k = 0(m^{2k}).$$

В выражении (11.5) за постоянные интегрирования вместо $C_1$ и $C_2$ можно принять $z_0$ и такую величину $\chi$, что

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \exp(\chi \sqrt{-1}), \quad C_2 = \frac{-1}{2\sqrt{-1}} \exp(-\chi \sqrt{-1}).$$

Тогда это выражение можно будет написать так:

$$z = z_0 \sin(\mathrm{g}\tau + \chi) + 0(m). \tag{11.8}$$

С другой стороны, если обратиться к треугольнику на геоцентрической небесной сфере, образованному эклиптикой, орбитой Луны и кругом широт, то легко увидеть, что

$$z = r \sin b = r \sin i \sin(v - \Omega), \tag{11.9}$$

$$z \simeq r \operatorname{tg} b = r \operatorname{tg} i \sin(l - \Omega), \tag{11.10}$$

где через $l$ и $b$ обозначены эклиптические долгота и широта Луны, а через $v$ — ее долгота в орбите.

В предположении, что Луна движется в плоскости эклиптики, имеем (§ 3)

$$r = \mathrm{a}\left[1 + \ldots - \left(m^2 + \frac{7}{6} m^3 + \ldots\right) \cos 2\tau + \ldots\right], \tag{11.11}$$

$$v = nt + \varepsilon + \left(\frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{6} m^3 + \ldots\right) \sin 2\tau + \ldots \tag{11.12}$$

Чтобы получить $z$ с той же точностью, какую дает выражение (11.8), в формулах (11.9) и (11.10) достаточно положить $r = a$, $v = nt + \varepsilon$, или $l = nt + \varepsilon$. Тогда будем иметь

$$z = \mathrm{ak} \sin(nt + \varepsilon - \Omega) + 0(m), \tag{11.13}$$

где можно, в пределах принятой точности, считать $\mathrm{k} = \operatorname{tg} i$. Эту величину мы и примем, вместо $z_0$, за одну из постоянных интегрирования, вводимых решением уравнения (11.1).

Изложенный способ дает для координаты $z$ выражение (11.5), имеющее ошибку $0(\mathrm{k}^2)$. Если его подставить в уравнение (10.3), то получим $u$ и $s$ с ошибкой $0(\mathrm{k}^3)$, после чего уравнение (11.1) даст $z$ с такой же точностью. Аналогичным способом могут быть получены возмущения $u$, $s$ и $z$, зависящие от всех степеней $m$, $e$ и $\mathrm{k}$.