§ 12. Движение узла

Так как выражения координаты z, даваемые формулами (11.8) и (11.13), при $m=0$ должны совпадать, то

$$\mathbf{g}\tau+\chi=nt+\varepsilon-\Omega.$$

Дифференцируя это уравнение и замечая, что

$$d\tau=(n-n')\,dt=\frac{n}{1+m}\,dt,$$

получим

$$\frac{d\Omega}{dt}=n(1-g), \tag{12.1}$$

где

$$g=\mathbf{g}/(1+m).$$

Величина g дает, таким образом, ту часть движения узла, которая зависит от m, но не зависит от e и k (наклон орбиты рассматривается как величина бесконечно малая). Чтобы найти $\mathbf{g}$, а следовательно, и g, нужно решить уравнение (11.6).

Формула (11.11) и соотношение (§ 14 гл. XV)

$$\varkappa a^{-3}=1+2m+\frac{3}{2}m^2+\ldots$$

позволяют найти коэффициенты разложения

$$m^2+\varkappa r^{-3}=M_0+2M_1\cos 2\tau+2M_2\cos 4\tau+\ldots \tag{12.2}$$

в функции m. Получив

$$M_0=1+2m+\frac{5}{2}m^2+\ldots,\quad M_1=\frac{3}{2}m^2+\frac{19}{4}m^3+\ldots,\quad\ldots, \tag{12.3}$$

можно решить уравнение (11.6) способом, указанным в § 7. Это дает

$$g=1+\frac{3}{4}m^2-\frac{57}{32}m^3+\frac{123}{128}m^4-\frac{1925}{2048}m^5+$$
$$+\frac{25\,667}{24\,576}m^6-\frac{268\,309}{589\,824}m^7+\ldots$$

Однако в тех случаях, когда надо получить большую точность, целесообразнее прибегнуть к численным методам, нежели пользоваться разложениями по степеням m. Для значения m, соответствующего Луне (§ 3), Хилл [1878] при помощи формул (3.7) и (3.8) вычислил значения функции (12.2) для $\tau=0°$, 15°, 30°, ..., 90°. Употребив затем обычные формулы гармонического анализа, он получил:

$$\begin{aligned} m^2+\varkappa r^{-3} = {} & 1{,}17804\ 45712\ 77166\ + \\ & +0{,}02523\ 36924\ 97860 \cos 2\tau + \\ & +0{,}00025\ 15533\ 50012 \cos 4\tau + \\ & +0{,}00000\ 24118\ 79799 \cos 6\tau + \\ & +0{,}00000\ 00226\ 05851 \cos 8\tau + \\ & +0{,}00000\ 00002\ 08750 \cos 10\tau + \\ & +0{,}00000\ 00000\ 01908 \cos 12\tau + \\ & +0{,}00000\ 00000\ 00017 \cos 14\tau. \end{aligned}$$

С этими значениями коэффициентов уравнение (11.6) дает

$$\mathbf{g} = 1{,}08517\ 14265\ 58189,$$

откуда

$$g = 1{,}00399\ 91645\ 34949.$$

Это показывает, в соответствии с принятым значением n (§ 3), что годовое движение узла, поскольку оно зависит только от m, равно

$$n(1-g) = -69288'',50622175.$$

Наблюдаемая величина среднего движения узла равна 69679″,33. Разность этих величин представляет влияние членов, зависящих от e, k, e' и a/a'.

Изложенный здесь метод нахождения основной части движения узла был дан Адамсом еще в 1868 г., но был им опубликован лишь в 1877 г., уже после появления работы Хилла о движении перигея. Разработанный Адамсом способ решения уравнения (11.4) при помощи бесконечных определителей совпадает в основном со способом Хилла (§§ 5—7). Впоследствии было показано, что численное решение уравнения (11.4) можно очень просто получить способом последовательных дифференциальных поправок [Браун, 1936].

§ 13. Возмущения широты

Чтобы получить наиболее значительные возмущения широты, нужно в равенство $\operatorname{tg} b \approx z/r$ подставить выражения (11.5) и (11.11). Вычислим для этого первые коэффициенты разложения (11.5).

Ограничиваясь величинами $O(m^3)$, систему уравнений (11.7) можно написать так:

$$\begin{aligned} M_1 z_{-1} + (M_0 - \mathbf{g}^2) z_0 + M_{-1} z_1 &= 0, \\ [M_0 - (\mathbf{g}-2)^2] z_{-1} + M_{-1} z_0 &= 0, \\ M_1 z_0 + [M_0 - (\mathbf{g}+2)^2] z_1 &= 0. \end{aligned}$$