ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

§ 1. ВЕКТОРНАЯ ЗАПИСЬ ЗАКОНА ТЯГОТЕНИЯ. НЬЮТОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОЛЯ, СОЗДАННОГО ОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКОЙ

1. Пусть некоторая масса M сосредоточена в точке A. Такую сосредоточенную массу, как известно, называют точечной массой или материальной точкой. Мы ее для краткости будем обозначать (A, M).

Пусть, помимо материальной точки (A, M), имеется еще другая материальная точка (P, m) (рис. 1.1). Благодаря притяжению к массе M положение точки (P, m) в пространстве будет со временем меняться. Обозначим вектор $\overrightarrow{AP}$ через $\boldsymbol{r}$, а его длину — через r. Вектор силы $\boldsymbol{F}$, с которой материальная точка (A, M) притягивает материальную точку (P, m), имеет согласно закону тяготения величину $F = f\,\frac{Mm}{r^2}$. Направление же силы $\boldsymbol{F}$ противоположно направлению вектора $\boldsymbol{r}$. Поэтому единичный вектор этой силы равен $-\boldsymbol{r}/r$ и, согласно закону всемирного тяготения,

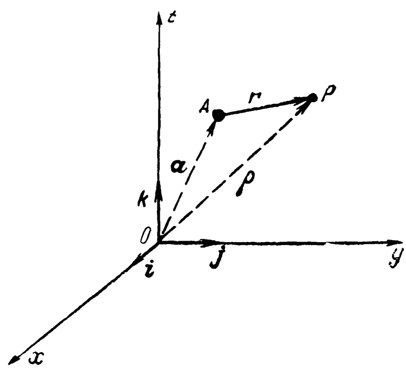

Рис. 1.1.

$$\boldsymbol{F} = f\,\frac{Mm}{r^2}\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

или

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}. \qquad (1)$$

Выберем какую-либо систему отсчета $Oxyz$. Через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ обозначим единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz. Пусть

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a}|^3}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{a}). \qquad (2)$$

Обозначим координаты точек A и P соответственно через (a, b, c) и (x, y, z), а проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси координат — через F_x, F_y, F_z. Тогда векторное равенство (2) можно заменить тремя скалярными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -f\frac{Mm}{r^3}(x-a),\\ F_y &= -f\frac{Mm}{r^3}(y-b),\\ F_z &= -f\frac{Mm}{r^3}(z-c), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \qquad (4)$$

Для простоты выберем начало отсчета в точке A. Тогда

$$F_x = -f\frac{Mm}{r^3}x,\quad F_y = -f\frac{Mm}{r^3}y,\quad F_z = -f\frac{Mm}{r^3}z, \qquad (5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (6)$$

Для упрощения записи иногда выгодно особо выделить случай, когда в принятой системе единиц измерения $m = 1$ (в точке P помещена единичная масса). Тогда формулы (1) и (5) примут вид

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}, \tag{7}$$

$$F_x = -f\frac{M}{r^3}x, \quad F_y = -f\frac{M}{r^3}y, \quad F_z = -f\frac{M}{r^3}z. \tag{8}$$

2. Если в каждой точке (x, y, z) пространства (или какой-либо его части) определена некоторая сила $\boldsymbol{F}(x, y, z)$, то говорят, что задано *силовое поле*. Поле, определяемое формулой (7), называют *центральным полем ньютоновского тяготения*.

В механике вводится понятие *потенциала* (или *силовой функции*) *поля*. Напомним определение этого понятия. Функция $U(x, y, z)$ называется потенциалом данного силового поля

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}, \tag{9}$$

если

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z. \tag{10}$$

Если такая функция $U(x, y, z)$ для данного силового поля существует, то поле называется *потенциальным*. Если у двух силовых полей силовые функции совпадают или же отличаются на постоянное число, то эти поля тоже совпадают. Иначе говоря, потенциал для данного (потенциального) силового поля определяется с точностью до произвольного слагаемого. Вектор силы в потенциальном поле определяется формулой

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{11}$$

Пусть в некоторой области пространства заданы силовые поля функциями $\boldsymbol{F}_1(x, y, z)$, $\boldsymbol{F}_2(x, y, z)$, ..., $\boldsymbol{F}_n(x, y, z)$, имеющими потенциалы $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$, ..., $U_n(x, y, z)$; легко доказать, что для силового поля, определяемого вектором

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{F}_1(x, y, z) + \boldsymbol{F}_2(x, y, z) + \ldots + \boldsymbol{F}_n(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k(x, y, z).$$

тоже существует потенциал $U(x, y, z)$, который равен

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(x, y, z).$$

Таким образом, *потенциал суммы нескольких сил равен сумме потенциалов этих сил.*

Обратимся теперь к центральному полю ньютоновского тяготения, задаваемому формулой (7). Покажем, что *это поле является потенциальным* и что *функция*

$$U = f\frac{M}{r} \tag{12}$$

является его потенциалом. Действительно, из (12) имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = fM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -fM\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Но $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, откуда $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. Следовательно

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -f\frac{M}{r^3}x.$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -f\frac{M}{r^3}y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -f\frac{M}{r^3}z.$$

Сопоставляя эти соотношения с формулами (8), убеждаемся в том, что функция (12) является потенциалом поля (7).

3. *Элементарной работой силового поля* на элементе пути $d\boldsymbol{r}$ называется скалярное произведение

$$\delta T = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

так что

$$\delta T = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{13}$$

Вообще говоря, не обязательно должна существовать функция, для которой это выражение служит полным дифференциалом. Поэтому, во избежание недоразумений, мы здесь и употребляем для элементарной работы обозначение δT, а не dT. Но если поле потенциально, то δT

совпадает с dU:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Итак, в этом случае

$$\delta T = dU, \quad dU = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{14}$$

Если под действием поля единичная масса переместилась из положения Q в положение P, описав некоторую дугу $\overset{\frown}{QP}$, то выполненная полем работа T определяется криволинейным интегралом

$$T = \int_{\overset{\frown}{QP}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

В случае потенциального поля

$$T = \int_{\overset{\frown}{QP}} dU = U(P) - U(Q),$$

то есть T зависит не от пути, по которому перемещается единичная масса из точки Q в точку P, а только от положения этих точек. В частности, в случае центрального ньютоновского поля $T = f\frac{M}{|\overrightarrow{AP}|} - f\frac{M}{|\overrightarrow{AQ}|}$. При $AQ \to \infty$ и $AP = r$ найдем, что

$$T = f\frac{M}{r} \equiv U(r). \tag{15}$$

Таким образом, потенциал $U(r)$ ньютоновского поля имеет простой физический смысл: это — работа, которую выполняет поле при переносе единичной массы из бесконечности в данную точку P, отстоящую от A на расстоянии r.

Можно сказать и так: *силовая функция $U(r)$ — это работа, которую следует затратить, чтобы преодолеть притяжение массы M и удалить единичную массу на бесконечно большое расстояние от массы M.*

Величину $-U(x, y, z)$ называют *потенциальной энергией* поля в точке (x, y, z). В случае ньютоновского поля (7) потенциальная энергия точки, имеющей единичную массу, равна $-fM/r$.

В механике часто выгодно сначала найти потенциал силового поля, а затем уже силу, действующую в каждой точке поля. При таком способе вычисления приходится иметь дело лишь с одной скалярной функцией, а к векторным величинам переходить лишь на конечном этапе рассуждений.

Задачи

1. Какое тело притягивает Луну сильнее — Земля или Солнце? Масса Земли меньше массы Солнца в $\frac{1}{3}\cdot 10^6$ раз и больше массы Луны в 81 раз. Расстояние Луны от Земли около 380 000 *км*, расстояние Луны от Солнца около $150\cdot 10^6$ *км*.

2. Две активно гравитирующие массы M_1 и M_2 расположены в двух точках A_1 и A_2. Найдите потенциал гравитационного поля, созданного этими массами. Зная расстояния r_1 и r_2 от пассивно гравитирующей точечной массы m до точек A_1 и A_2, получите формулы для силы, действующей на массу m.

§ 2. ПОТЕНЦИАЛ ШАРА СО СФЕРИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

Пусть имеется тело V (рис. 1.2) с массой M и материальная точка (P, m). Тело V притягивает точку (P, m) с некоторой силой $\boldsymbol{F}$. Сила $\boldsymbol{F}$ определяется как равнодействующая сил, с которыми все частицы тела V притягивают точку (P, m). Опишем кратко способ нахождения потенциала поля тяготения к телу V. Для этого нам придется ввести понятие плотности. Выделим в теле V некоторую часть с объемом ΔV. *Средней плотностью* называется отношение массы ΔM этой части к ΔV. Предел $\delta(Q)$ этого отношения, когда часть ΔV стягивается к точке Q, называется *плотностью в точке* Q:

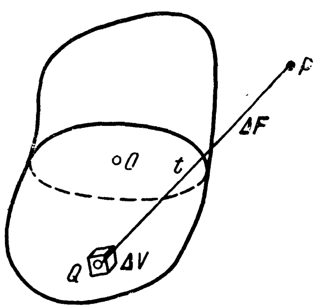

Рис. 1.2.

$$\delta(Q) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \tag{1}$$