В механике часто выгодно сначала найти потенциал силового поля, а затем уже силу, действующую в каждой точке поля. При таком способе вычисления приходится иметь дело лишь с одной скалярной функцией, а к векторным величинам переходить лишь на конечном этапе рассуждений.

Задачи

1. Какое тело притягивает Луну сильнее — Земля или Солнце? Масса Земли меньше массы Солнца в $\frac{1}{3}\cdot 10^6$ раз и больше массы Луны в 81 раз. Расстояние Луны от Земли около 380 000 *км*, расстояние Луны от Солнца около $150\cdot 10^6$ *км*.

2. Две активно гравитирующие массы M_1 и M_2 расположены в двух точках A_1 и A_2. Найдите потенциал гравитационного поля, созданного этими массами. Зная расстояния r_1 и r_2 от пассивно гравитирующей точечной массы m до точек A_1 и A_2, получите формулы для силы, действующей на массу m.

§ 2. ПОТЕНЦИАЛ ШАРА СО СФЕРИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

Пусть имеется тело V (рис. 1.2) с массой M и материальная точка (P, m). Тело V притягивает точку (P, m) с некоторой силой $\boldsymbol{F}$. Сила $\boldsymbol{F}$ определяется как равнодействующая сил, с которыми все частицы тела V притягивают точку (P, m). Опишем кратко способ нахождения потенциала поля тяготения к телу V. Для этого нам придется ввести понятие плотности. Выделим в теле V некоторую часть с объемом ΔV. *Средней плотностью* называется отношение массы ΔM этой части к ΔV. Предел $\delta(Q)$ этого отношения, когда часть ΔV стягивается к точке Q, называется *плотностью в точке* Q:

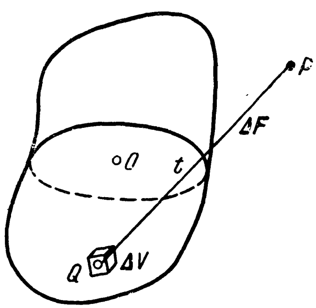

Рис. 1.2.

$$\delta(Q) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \tag{1}$$

При малом ΔV мы имеем приближенное равенство

$$\Delta M \approx \delta \Delta V,$$

где δ — плотность в точке Q объема ΔV. Обозначая через t расстояние от точки P до точки Q, найдем «элементарный» потенциал поля, создаваемого частью ΔV тела:

$$\Delta U = f\frac{\delta \Delta V}{t}.$$

Отсюда интегрированием находим выражение для потенциала поля тела V

$$U = f\iiint\limits_V \frac{\delta \cdot dV}{t}. \tag{2}$$

Величину силы $\boldsymbol{F}$ можно выразить через потенциал по формуле (11) предыдущего параграфа.

Во многих случаях, как упоминалось во введении, в теории притяжения материальные тела заменяют материальными точками. При этом естественно считать массу тела сосредоточенной в его центре тяжести. Мысленно сосредоточим всю массу M тела V в его центре тяжести O и подсчитаем силу, с которой эта (сосредоточенная) масса притягивала бы точку (P, m). Получим некоторую новую силу $\boldsymbol{F}_1$. Справедливо ли равенство $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}$? Иначе говоря, изменится ли сила, с которой тело V притягивает материальную точку (P, m), если всю массу тела сосредоточить в его центре тяжести? Оказывается, что, вообще говоря, изменится. Более того, может оказаться, что сила $\boldsymbol{F}$ даже и не направлена к центру тяжести тела. Однако есть такие очень важные для практики случаи, когда силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}$ совпадают. Далее мы покажем, что это имеет место, в частности, если тело является шаром с так называемым сферическим распределением плотности, а точка (P, m) находится вне этого шара.

Если во всех точках, равноудаленных от центра шара, плотности равны, то говорят, что *шар имеет сферическое распределение плотности.* Простейшим примером такого шара будет однородный шар. В этом случае во всех точках шара плотность одна и та же. В общем случае можно себе наглядно представить шар со сферическим распределением плотности как составленный из однородных сфер, имеющих общий центр и наслаивающихся одна на другую.

Найдем силу, с которой такой шар притягивает материальную точку P, имеющую единичную массу и лежащую вне шара. Для этой цели мы сначала подсчитаем потенциал шара на эту точку P (то есть значение в точке P потенциала поля тяготения к шару). Для упрощения выкладок вычислим сначала один вспомогательный интеграл.

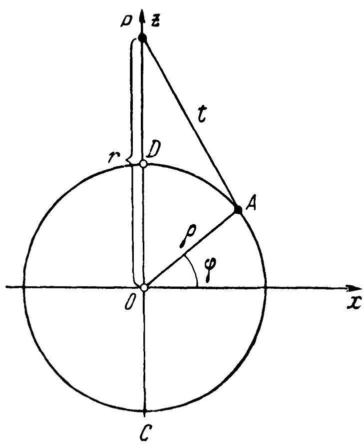

Рис. 1.3.

Лемма. Если

$$t = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi}, \tag{3}$$

$$r = \text{const}, \ \rho = \text{const}, \ r \neq \rho,$$

то

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{t} \, d\varphi = \frac{1}{r\rho} [(r + \rho) - |r - \rho|]. \tag{4}$$

Геометрически t можно истолковать как расстояние от точки A $(\rho \cos \varphi, \ \rho \sin \varphi)$, лежащей на окружности $x^2 + z^2 = \rho^2$, до точки P, лежащей на луче Oz (рис. 1.3). Интеграл вычисляется в предположении, что точка A пробегает дугу CAD (правую полуокружность на рис. 1.3).

Доказательство. Так как

$$t^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin \varphi,$$

то

$$2t \, dt = -2r\rho \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$\frac{\cos \varphi \, d\varphi}{t} = -\frac{dt}{r\rho}.$$

При $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $t = r + \rho$; при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $t = |r - \rho|$.

Поэтому

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{t}\,d\varphi = -\int_{r+\rho}^{|r-\rho|} \frac{dt}{r\rho} = \frac{1}{r\rho}\,[(r+\rho) - |r-\rho|].$$

В частности, при $r > \rho$ найдем:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{t}\,d\varphi = \frac{2}{r}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Если шар имеет сферическое распределение плотности, то его потенциал на внешнюю точку не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.*

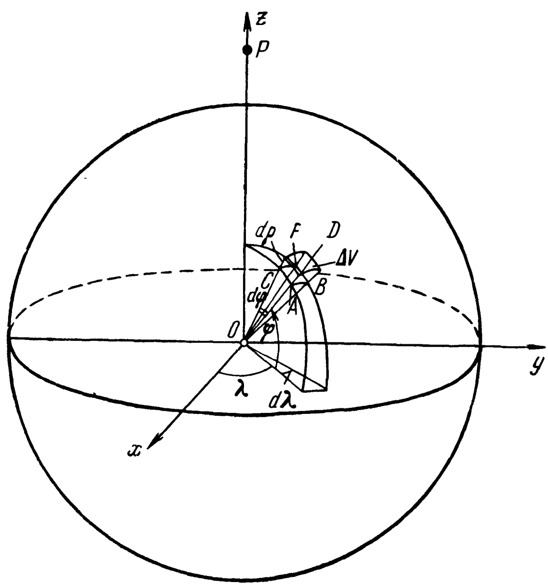

Рис. 1.4.

Доказательство. Пусть M — масса шара, R — его радиус, $\delta(\rho)$ — плотность шара в точке, отстоящей от центра на расстоянии ρ. Положение точки A внутри шара характеризуется сферическими координатами ρ, φ, λ. Здесь ρ — расстояние точки A от центра шара; φ — широта точки A, λ — долгота этой точки.

Вырежем из шара элемент объема ΔV с помощью следующих поверхностей (рис. 1.4):

а) двух сфер радиусов ρ и $\rho + d\rho$ соответственно;

б) двух меридиональных плоскостей, образующих с осью Ox углы λ и $\lambda + d\lambda$;

в) двух плоскостей, определяемых следующими двумя тройками точек:

$$O,\ A\ (\rho, \varphi, \lambda),\ B\ (\rho, \varphi, \lambda + d\lambda);$$
$$O,\ C\ (\rho, \varphi + d\varphi, \lambda),\ F\ (\rho, \varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda).$$

Нетрудно подсчитать, что с точностью до бесконечно малых порядка выше первого (относительно $d\rho$, $d\varphi$, $d\lambda$)

$$AC = \rho\, d\varphi,\ AB = \rho \cos\varphi\, d\lambda,\ AD = d\rho.$$

Поэтому элемент ΔV имеет объем

$$dV = \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\lambda.$$

Его масса

$$dM = \delta\ (\rho)\ \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\lambda.$$

Масса всего шара

$$M = \iiint\limits_V \delta\ (\rho)\ \rho^2 \cos\varphi\ d\rho\, d\varphi\, d\lambda =$$
$$= \int\limits_0^R \delta\ (\rho)\, \rho^2\, d\rho \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\lambda,$$

то есть

$$M = 4\pi \int\limits_0^R \delta\ (\rho)\ \rho^2\, d\rho. \tag{6}$$

Пусть теперь в точке P помещена единичная масса. Мы можем считать, что точка P лежит на оси Oz. Потенциал массы dM на точку P равен $f\,\frac{dM}{t}$, где $t = AP$; $OP = r > R$.

По формуле (2) находим теперь потенциал поля шара в точке P:

$$U = f \iiint\limits_V \delta\ (\rho)\, \frac{\rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\lambda}{t},$$
$$t = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \sin\varphi},$$

и для вычисления U можно воспользоваться доказанной леммой:

$$U = f\int_0^R \delta(\rho)\,\rho^2\,d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{t}\,d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda =$$

$$= \frac{f}{r}\,4\pi\int_0^R \delta(\rho)\,\rho^2\,d\rho = f\,\frac{M}{r}\,. \qquad (7)$$

Но в точности такой же потенциал на точку P мы получим, если сосредоточим всю массу шара в его центре O. Теорема доказана.

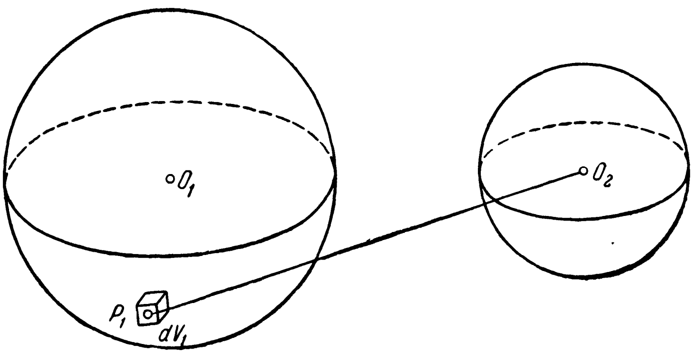

Рис. 1.5.

Следствие. Сила, с которой шар со сферическим распределением плотности притягивает лежащую вне его материальную точку $(P,\ m)$, не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.

Опираясь на это следствие, сделаем важное заключение о силе взаимодействия *двух шаров*, имеющих сферическое распределение плотности и расположенных один вне другого. Под силой, с которой одно тело притягивает второе тело, понимают равнодействующую всех сил, с которыми частицы первого тела притягивают частицы второго тела.

Теорема 2. *Если два тела являются внешнерасположенными шарами*) со сферическим распределением плотности, то сила, с которой один из них притягивает к себе другой шар, не изменится, если массы этих шаров сосредоточить в их центрах.*

Доказательство. Обозначим массы шаров через M_1 и M_2, центры шаров через O_1 и O_2. Выделим внутри первого шара (рис. 1.5) элемент объема dV_1 с массой dM_1. Если «тело» dV_1 достаточно мало, то можно рассматривать его как материальную точку и всю его массу считать сосредоточенной в одной какой-либо точке P_1. Так как второй шар имеет сферическое распределение плотности, то силу, с которой он притягивает элемент dM_1, можно считать равной

$$f\frac{M_2\,dM_1}{|\overrightarrow{O_2P_1}|^2}$$

и направленной по прямой от P_1 к O_2. В силу третьего закона Ньютона элемент dM_1 притягивает второй шар с силой, равной $fM_2\cdot dM_1/|\overrightarrow{O_2P_1}|^2$ и направленной от O_2 к P_1. Но в точности с такой же силой притягивает масса dM_1 точечную массу M_2, сосредоточенную в точке O_2. Поэтому равнодействующая всех сил, с которыми *все* элементы dM_1 первого шара притягивают второй шар, равна равнодействующей сил, с которыми элементы первого шара притягивают точечную массу M_2, сосредоточенную в точке O_2.

Так как первый шар также обладает сферическим распределением плотности, то согласно следствию из предыдущей теоремы эта равнодействующая равна $fM_1M_2/|\overrightarrow{O_1O_2}|^2$ и направлена по прямой O_1O_2. А это и требовалось доказать.

Рассмотренные в этом параграфе случаи весьма важны для космонавтики. В частности, при изучении движения искусственных спутников Земли в течение небольшого промежутка времени (порядка одного-двух оборотов спутника

---

*) То есть такими шарами, расстояние между центрами которых больше суммы их радиусов.

вокруг Земли) мы получим удовлетворительную информацию об этом движении, если будем считать Землю шаром со сферическим распределением плотности, а спутник — материальной точкой.

Задачи

1. Представим себе гантель (рис. 1.6): два материальных шара A и B равной массы m, соединенных недеформируемым стержнем, масса которого ничтожно мала по сравнению с массой шаров. Гантель притягивает с некоторой силой точечную массу M, помещенную в точке P на продолжении отрезка AB. Изменится ли эта сила, если всю массу гантели сосредоточить в ее центре тяжести (то есть в середине O отрезка AB)?

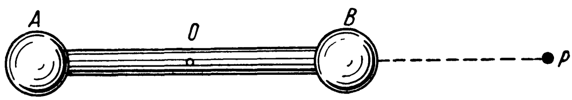

Рис. 1.6.

2. Однородный прямолинейный массивный стержень притягивает материальный шарик, причем стержень и шарик расположены на одной прямой (рис. 1.7). Изменится ли сила, с которой стержень притягивает

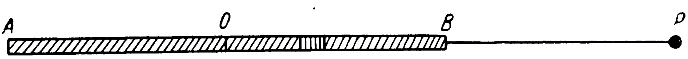

Рис. 1.7.

шарик, если сосредоточить всю массу стержня в его центре тяжести? В расчетах пренебречь толщиной стержня и размерами шарика, то есть стержень рассматривать как прямолинейный отрезок, а шарик — как материальную точку.

3. Пусть имеется однородная материальная сфера (поверхность шара). Докажите, что сила, с которой эта сфера притягивает материальную точку, лежащую вне сферы, не изменится, если всю массу сферы сосредоточить в ее центре. Остается ли это утверждение верным, если точка лежит внутри сферы? Как обстоит дело в этом случае?

4. Некоторые особенности движения спутника Марса Фобоса привели советского астронома И. С. Шкловского к предположению, что Фобос является *полым* телом (вероятно, искусственного происхождения).

Будем полагать, что Фобос представляет собой однородный полый шар (то есть тело, ограниченное двумя концентрическими сферами радиуса R и R_1, $R_1 < R$). Если поместить малое тело («материальную точку») в центр полого шара, то, очевидно, силы, действующие на это тело, уравновесятся. Найдите результирующую силу, с которой Фобос притягивает материальную точку (единичной массы), помещенную в *произвольной* точке P внутри его полости (то есть внутри сферы радиуса R_1).

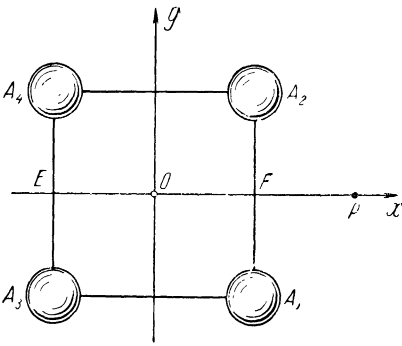

Рис. 1.8.

5. Четыре равных однородных шара, каждый с массой M, имеют своими центрами вершины квадрата $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 1.8) со стороной a. На прямой EF, соединяющей середины двух противоположных сторон квадрата, на расстоянии a от его центра расположена материальная точка (P, m). Изменится ли сила, с которой четверка шаров притягивает точку (P, m), если суммарную массу этих шаров сосредоточить в центре симметрии квадрата?

§ 3. ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА НЕСФЕРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

1. Пусть имеется тело, не являющееся шаром со сферическим распределением плотности. Рассмотрим задачу нахождения потенциала такого тела на внешнюю точку P.

Обозначим данное тело через V, его массу через M, его барицентр (центр тяжести) через O. Пусть l — любая прямая, проходящая через O. *Моментом инерции* тела относительно оси l называется в механике следующая величина:

$$J_l = \iiint_V r^2\, dM, \qquad (1)$$

где dM — элемент массы, а r — его расстояние до оси l. Для каждого тела существует тройка взаимно перпендикулярных осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, называющихся главными осями инерции (рис. 1.9). Эти оси проходят через центр тяжести тела O и характеризуются тем свойством, что момент