

радиуса R и R_1 , $R_1 < R$). Если поместить малое тело («материальную точку») в центр полого шара, то, очевидно, силы, действующие на это тело,

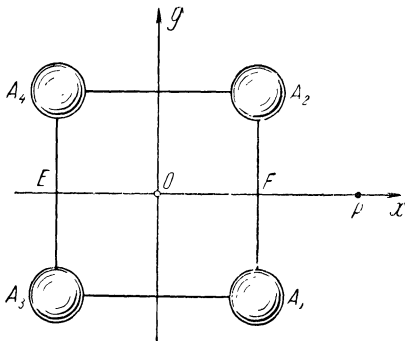


Рис. 1.8.

уравновесятся. Найдите результирующую силу, с которой Фобос притягивает материальную точку (единичной массы), помещенную в произвольной точке P внутри его полости (то есть внутри сферы радиуса R_1).

5. Четыре равных однородных шара, каждый с массой M , имеют своими центрами вершины квадрата $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 1.8) со стороной a . На прямой EF , соединяющей середины двух противоположных сторон квадрата, на расстоянии a от его центра расположена материальная точка (P, m).

Изменится ли сила, с которой четверка шаров притягивает точку (P, m), если суммарную массу этих шаров сосредоточить в центре симметрии квадрата?

§ 3. ПОТЕНЦИАЛ ТЕЛА НЕСФЕРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

1. Пусть имеется тело, не являющееся шаром со сферическим распределением плотности. Рассмотрим задачу нахождения потенциала такого тела на внешнюю точку P .

Обозначим данное тело через V , его массу через M , его барицентр (центр тяжести) через O . Пусть l — любая прямая, проходящая через O . Моментом инерции тела относительно оси l называется в механике следующая величина:

$$J_l = \iiint_V r^2 dM, \quad (1)$$

где dM — элемент массы, а r — его расстояние до оси l . Для каждого тела существует тройка взаимно перпендикулярных осей $O\xi, O\eta, O\zeta$, называемых главными осями инерции (рис. 1.9). Эти оси проходят через центр тяжести тела O и характеризуются тем свойством, что момент

инерции тела относительно любой оси l выражается через моменты инерции того же тела относительно главных осей A, B, C по формуле

$$J_l = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma, \quad (2)$$

где α, β, γ — углы между осью l и осями $O\xi, O\eta, O\zeta$.

Если бы вся масса M тела V была сосредоточена в его барицентре O , то потенциал тела на точку P был бы равен fM/r , где $r = OP$. В действительности же, как можно показать, потенциал тела V на ту же точку P может быть представлен в виде бесконечного сходящегося ряда, расположенного по возрастающим степеням величины $1/r$. Этот ряд имеет вид

$$U = f \left[\frac{M}{r} + \frac{A + B + C - 3J_l}{r^3} + \dots \right]. \quad (3)$$

Здесь l — ось OP .

Можно показать, что для тела V со сферическим распределением плотности все слагаемые в скобках, кроме первого, равны нулю (в частности, тогда $J_l = A = B = C$). Если тело по своей структуре мало отличается от такого шара или если точка P находится далеко от точки O (r велико), то U будет мало отличаться от первого слагаемого в формуле (3):

$$U \approx f \frac{M}{r}.$$

Таким образом, в первом приближении можно и в этих случаях считать всю массу тела сосредоточенной в его центре тяжести. Однако для получения более точных результатов необходимо учитывать хотя бы некоторые из отброшенных членов в формуле (3).

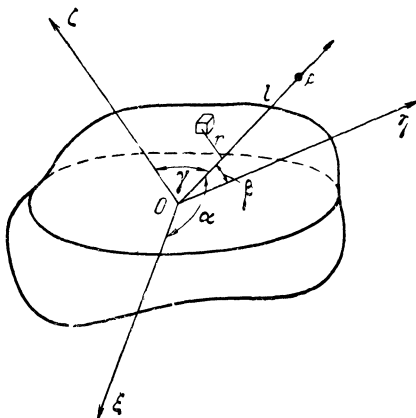


Рис. 1.9.

Рассмотрим пример. Достаточно хорошие прогнозы относительно движения высоколетящих спутников Земли (например, обращающихся на высоте 40—50 тыс. км) можно получить, если считать Землю шаром со сферическим распределением плотности. Такое допущение, как мы уже отметили выше, приведет к полезному первому приближению и в случае низколетящего спутника, если нас интересует его движение лишь в течение небольшого промежутка времени. Если же нас интересует движение низколетящего спутника Земли в течение длительного промежутка времени, то для получения результатов, хорошо согласующихся с практикой, необходимо пользоваться другой, более точной моделью Земли, например рассматривать Землю как сжатый сфероид (эллипсоид вращения). В еще большей мере такой подход полезен при изучении движения искусственных спутников других планет, например Юпитера, Нептуна, Марса, которые значительно более сплюснуты, чем Земля. В качестве меры сплюснутости (сжатия) планеты принимают отношение

$$\alpha = \frac{R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}}{R_{\text{экв}}}, \quad (4)$$

где $R_{\text{экв}}$ — экваториальный радиус планеты, $R_{\text{пол}}$ — полярный радиус. Например, для Земли $\alpha \approx 1/300$, для Марса $\alpha \approx 1/150$, для Юпитера $\alpha \approx 1/60$.

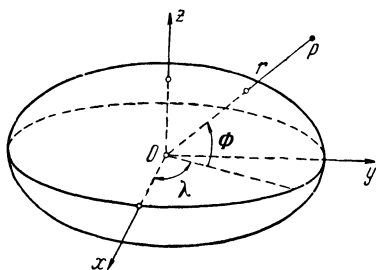


Рис. 1.10.

Принимая, что сила, с которой близкий спутник притягивается к сжатой планете, все время направлена к ее центру, мы можем иногда прийти к весьма неточным или даже ошибочным выводам.

2. Рассмотрим несколько подробнее вопрос о потенциале сжатого сфероида на расположенную вне его точку P (рис. 1.10).

Обозначим массу сфероида через M , а его экваториальный радиус через R . Выберем неподвижную (инерциальную)

систему отсчета $Oxyz$ с началом в центре симметрии сфероида; за плоскость Oxy примем его экваториальную плоскость. Положение точки P можно охарактеризовать либо тремя декартовыми координатами x, y, z , либо тремя сферическими координатами r, Φ, λ , где $r = OP$, Φ — широта точки P , то есть угол наклона вектора \vec{OP} к экваториальной плоскости, λ — долгота точки P .

Предположим, что во всех точках сфероида, имеющих одни и те же координаты r и Φ , но разные значения долготы λ , плотность одна и та же (в точках, симметричных относительно плоскости экватора, плотность может, вообще говоря, оказаться различной). Потенциал сфероида на точку P можно представить бесконечным рядом

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \Phi) + J_3 \left(\frac{R}{r} \right)^3 P_3(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_4(\sin \Phi) + \dots \right]. \quad (5)$$

Здесь J_2, J_3, J_4, \dots — некоторые вполне определенные для данного сфероида константы, зависящие от его размеров, формы и распределения масс внутри него, а $P_2(q), P_3(q), P_4(q), \dots$ — функции от t , называемые полиномами Лежандра, которые можно определить с помощью формулы

$$P_n(q) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dq^n} (q^2 - 1)^n. \quad (6)$$

Например,

$$P_0(q) = 1, \quad P_1(q) = q, \quad P_2(q) = \frac{1}{2} (3q^2 - 1),$$

$$P_3(q) = \frac{1}{2} (5q^3 - 3q), \dots$$

Заметим, что для сжатого сфероида $J_2 < 0$. Для земного сфероида

$$J_2 = - (1082,23 \pm 0,03) \cdot 10^{-6},$$

$$J_3 = (2,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-6},$$

$$J_4 = (2,12 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}.$$

Члены ряда (5) являются, очевидно, периодическими функциями от Φ (с периодом 2π). Они называются *зональными гармониками* соответственно нулевого, второго, третьего и т. д. порядка.

Из (5), ограничиваясь только первыми двумя членами разложения, получим приближенную формулу для потенциала сфероида

$$U \approx f \frac{M}{r} \left[1 + J_2 \frac{R^2}{r^2} P_2(\sin \Phi) \right].$$

Так как $P_2(\sin \Phi) = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \Phi - 1)$, то

$$U \approx \frac{fM}{r} - \varepsilon \frac{\sin^2 \Phi - \frac{1}{3}}{r^3}, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon = -\frac{3}{2} J_2 f M R^2.$$

В том случае, когда сфероид обладает механической симметрией относительно экваториальной плоскости (то есть в точках, симметричных относительно этой плоскости, плотность одна и та же), его потенциал на любую внешнюю точку P может быть вычислен по более простой формуле, чем (5):

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \Phi) + J_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_4(\sin \Phi) + J_6 \left(\frac{R}{r} \right)^6 P_6(\sin \Phi) + \dots \right]. \quad (8)$$

Заметим, что в случае земного сфероида влияние зональных гармоник порядка выше четвертого мало, а коэффициенты J_k при $k > 4$ известны весьма грубо. Поэтому при изучении движения искусственных спутников можно получить хорошее приближение, если в формуле для U пренебречь членами, в которых $1/r$ входит в степени выше четвертой. Однако такой подход приводит к весьма громоздким выкладкам, а расчеты траектории оказываются очень длительными.

В течение последних лет было предложено несколько различных способов такой замены потенциала сжатого сфероида другим, близким потенциалом, при которой дальнейшие расчеты движения спутника становятся значительно менее громоздкими [М. Д. Кислик (СССР), Дж. П. Винти (США)]. Весьма интересный способ был предложен в 1960—1962 годах Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребениковым и В. Г. Деминым [1.1]. Изложим его сущность. Пусть имеются две (активно гравитирующие) точечные массы M_1 и M_2 , расположенные в двух фиксированных (не меняющих своего положения) точках A_1 и A_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии $2a$. Материальные точки (A_1, M_1) и (A_2, M_2) создают силовое поле с потенциалом

$$U_0 = f \left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} \right), \quad (9)$$

где r_1 и r_2 — это расстояния от точек A_1 и A_2 до точки $(P, 1)$ единичной массы. Если в некоторой прямоугольной системе координат точки A_1, A_2 и P имеют соответственно координаты $(0, 0, -a)$, $(0, 0, a)$ и (x, y, z) , то

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Пусть известны положение и скорость точки P в один какой-то момент времени и требуется определить движение точки P (то есть найти положение и скорость точки P в любой другой момент времени). Эта задача, которая носит название *задачи о двух фиксированных центрах*, была решена в замкнутом виде еще в XVIII веке известным математиком Л. Эйлером.

Нас будет интересовать случай $M_1 = M_2 = \frac{1}{2} M$.

Известные методы решения задачи о двух фиксированных центрах применимы и для того случая, когда некоторое силовое поле задается потенциалом вида (9), где a — чисто мнимое число: $a = ci$ ($c > 0$, i — мнимая единица). При этом r_1 и r_2 оказываются мнимыми, но сопряженными числами (если одно из них имеет вид $A + Bi$, то второе имеет вид $A - Bi$). Поэтому — при нашей оговорке,

что $M_1 = M_2 = \frac{1}{2} M$, — потенциал U_0 будет вещественной функцией

$$U_0 = \frac{1}{2} fM \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (11)$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + ci)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ci)^2}. \quad (12)$$

Для нас сейчас несущественно, при каком именно реальном распределении масс может возникнуть такой потенциал, — важно то, что при таком потенциале можно получить достаточно удобные формулы, описывающие движение материальной точки P . В теории полиномов Лежандра устанавливается такая формула:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\alpha + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\lambda). \quad (13)$$

Пользуясь ею, можно разложить функцию U_0 в ряд по полиномам Лежандра. Положим в этой формуле $\lambda = z/r = \sin \Phi$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и $\alpha = i \frac{c}{r}$. Тогда найдем, что

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1/r}{\sqrt{1 - 2i \frac{z}{r} \frac{c}{r} - \frac{c^2}{r^2}}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \frac{c}{r} \right)^n \cdot P_n \left(\frac{z}{r} \right).$$

Аналогично

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-i \frac{c}{r} \right)^n \cdot P_n \left(\frac{z}{r} \right),$$

откуда

$$U_0 = f \frac{M}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r} \right)^{2k} \cdot P_{2k}(\sin \Phi) \right]. \quad (14)$$

Сравним формулы (8) и (14). Если положить $c = \sqrt{-J_2}$ ($-J_2$ — положительное число), то у рядов (8) и (14) окажутся соответственно равными первые два члена. Числен-

ный подсчет показывает, что третьи члены у этих рядов обычно тоже достаточно близки (например, если речь идет о земном сфероиде). Полагая $\Delta = U - U_0$, имеем

$$U = U_0 + \Delta.$$

Таким образом, потенциал сфероида распадается на два слагаемых, из которых одно (U_0) мало отличается от U ; второе слагаемое Δ не только мало, но еще содержит параметры, которые практически определяются весьма неточно. U_0 можно назвать *нормальной составляющей потенциала сфероида*, а Δ — его *аномальной частью*. Гравитационное поле с потенциалом U_0 можно назвать *нормальным гравитационным полем сфероида*. На практике при изучении движения спутника в поле сжатого сфероида мы получим достаточно хороший результат, если вместо поля с потенциалом U будем рассматривать движение спутника в поле с потенциалом U_0 . Та же идея использования потенциала задачи двух неподвижных центров (9) при мнимых значениях некоторых параметров (расстояний, масс) может быть применена и для того случая, когда сфероид не обладает механической симметрией относительно экваториальной плоскости. Потенциал сфероида в этом случае имеет вид (5) и заменяется потенциалом вида (9), но с комплексными параметрами. Такая модель сфероида выгодна в тех случаях, когда мы хотим учесть при движении спутника Земли ее грушевидность.