# ГЛАВА II

# ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

## § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Во многих случаях можно получить достаточно хорошее представление о движении какого-либо небесного тела (по крайней мере в течение небольшого промежутка времени), если учесть воздействие на него лишь одного,

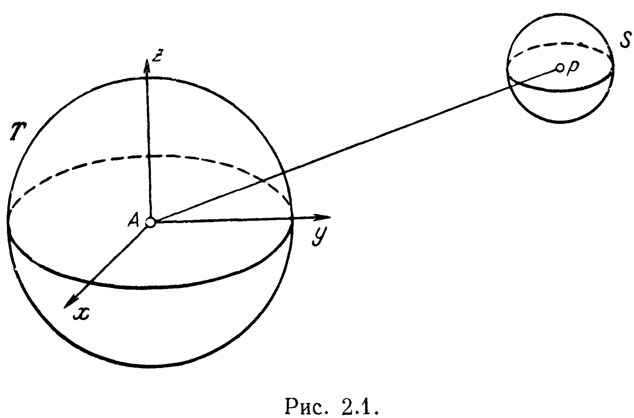


Рис. 2.1.

наиболее сильно притягивающего его тела и пренебречь влиянием всех других небесных тел. Так, например, обстоит дело при изучении движения Земли вокруг Солнца или близкого искусственного спутника вокруг Земли.

Пусть нас интересует движение тела $S$ в гравитационном поле, созданном другим телом $T$ (рис. 2.1). Это движение будем рассматривать в системе отсчета с началом в барицентре (центре тяжести, центре масс) $A$ тела $T$ и с осями, постоянно ориентированными в пространстве. Если размеры тела $S$ малы по сравнению с расстояниями его точек до точек тела $T$, то мы получим достаточно хорошее представление о движении любой его точки, если изучим движение той материальной точки $(P, m)$, которая образуется, если всю массу тела $S$ сосредоточить в его барицентре $P$. В результате такого сосредоточения массы траектория барицентра $P$ тела $S$ практически не изменится. Когда говорят о траектории некоторого *тела* $S$ и о его скорости, имеют в виду траекторию и скорость материальной *точки* $(P, m)$. Что касается тела $T$, то будем в этой главе считать, что оно является шаром со сферическим распределением плотности. Поэтому сила, действующая на материальную точку $(P, m)$, не изменится, если мы будем считать всю массу $M$ тела $T$ сосредоточенной в его барицентре $A$.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: *изучить движение точечной массы $m$, происходящее в гравитационном поле, созданном некоторым телом $T$, если это тело является шаром со сферическим распределением плотности.*

При сделанном выше предположении о теле $T$ эта задача равносильна, очевидно, такой задаче: *изучить движение материальной точки $(P, m)$ в гравитационном поле, созданном другой материальной точкой $(A, M)$.*

При этом движение будем рассматривать относительно точки $A$, то есть в системе отсчета с началом в точке $A$ и с осями, сохраняющими ориентацию в пространстве.

Эту задачу обычно называют *задачей двух тел* (точнее было бы назвать ее «задачей двух материальных точек»).

Тело $T$, в поле тяготения которого рассматривается движение материальной точки $(P, m)$, будем называть в дальнейшем *центральным телом*. В вопросах космонавтики центральным телом может оказаться Земля, Луна, Солнце, какая-либо планета, звезда и т. п.

Если в каких-либо рассуждениях вся масса $M$ центрального тела считается сосредоточенной в одной точке $A$, то материальную точку $(A, M)$ будем еще называть *притягивающим центром*. Материальную точку $(P, m)$, чье движение относительно центрального тела $T$ изучается, назовем условно, для краткости, его *спутником*.

Например, при изучении движения Земли вокруг Солнца роль центрального тела будет выполнять Солнце, роль спутника — Земля. При изучении движения искусственного спутника вокруг Земли роль центрального тела играет Земля.

Вектор $\overrightarrow{AP}$, у которого начало—притягивающий центр $A$, а конец — спутник $P$, будем называть *радиусом-вектором спутника*.

**2.** Для космонавтики особенно интересен тот случай, когда масса спутника ничтожна по сравнению с массой центрального тела. В таком случае притяжение спутника практически не сказывается на движении центрального тела, не сообщает ему ощутимого ускорения. Этой физической картине соответствует следующая *математическая модель*: спутник рассматривается как материальная точка, притягиваемая к центральному телу, но не притягивающая это тело.

Мы, таким образом, имеем дело со следующей задачей, которую можно назвать *ограниченной задачей двух тел* или задачей о непритягивающем (пассивно гравитирующем) спутнике: *изучить движение материальной точки* ($P$, $m$) (*спутника*) *в ньютоновском поле тяготения другой материальной точки* ($A$, $M$) (*притягивающего центра*) *при допущении, что спутник вовсе не притягивает к себе притягивающий центр*.

Наглядно картину можно представить себе как движение спутника вокруг «закрепленного в пространстве» центрального тела (звезды, планеты), точнее—вокруг тела, неподвижного относительно некоторой инерциальной системы отсчета.

Спутник, не влияющий на движение центрального тела, мы условимся еще называть «малым спутником»*).

Запишем теперь дифференциальные уравнения движения непритягивающего спутника ($P$, $m$) относительно притягивающего центра ($A$, $M$).

Пусть $O\xi\eta\zeta$ — инерциальная система отсчета, в которой притягивающий центр ($A$, $M$) остается неподвижным (рис. 2.2). Пусть $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{\rho}$, $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{r}$, $M$ — масса

*) Иногда его называют — не совсем удачно— «бесконечно малым телом» или «телом бесконечно малой массы».

притягивающего центра, $m$ — масса спутника. По второму закону Ньютона

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Число

$$K \equiv fM \tag{2}$$

будем называть *гравитационным параметром* притягивающего центра. Для Солнца $K_С = 1325 \cdot 10^8$ *км*$^3$/*сек*$^2$, для Луны $K_Л = 4900$ *км*$^3$/*сек*$^2$, для Земли $K_З = 398\,600$ *км*$^3$/*сек*$^2$ *). Уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \tag{3}$$

или

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} + K\frac{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}|^3} = 0. \tag{4}$$

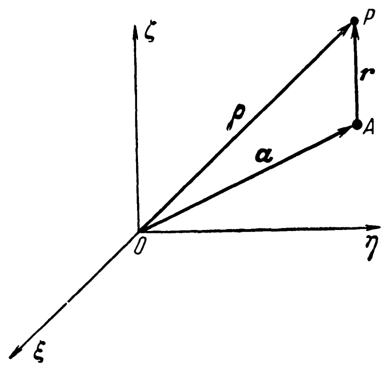

Рис. 2.2.

3. Рассмотрим теперь общий случай задачи двух материальных точек (*случай притягивающего спутника*).

Пусть притягивающий центр $A$ имеет массу $M$, а спутник $P$ — массу $m$. Выберем в пространстве «неподвижную» (точнее говоря, инерциальную) систему отсчета $O\xi\eta\zeta$ и другую систему отсчета $Axyz$ с началом в точке $A$, причем оси $Ax$, $Ay$, $Az$ соответственно параллельны осям $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ и одинаково направлены с ними (рис. 2.3). На движение спутника в пространстве влияет по-прежнему притяжение центрального тела. Но в свою очередь спутник, притягивая центральное тело, сам «сдвигает» его в «абсолютном», «неподвижном» (инерциальном) пространстве, и этот фактор также сказывается на положении спутника.

*) Гравитационные параметры планет приведены в приложении.

Сохраним обозначения, принятые выше в случае непритягивающего спутника. На точку $(P, m)$ теперь действует сила

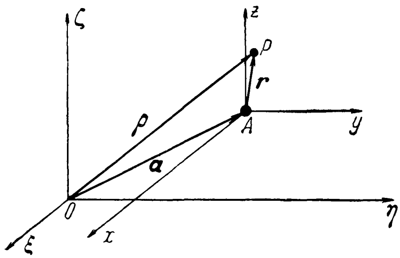

Рис. 2.3.

$$\boldsymbol{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Поэтому

$$m\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r},$$

то есть

$$\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -f\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}. \quad (5)$$

Точка, $(A, M)$ сдвигается относительно инерциальной системы отсчета $O\xi\eta\zeta$ благодаря силе $\boldsymbol{F}_1 = f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$. Поэтому $M\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2} = f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$, так что

$$\frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2} = f\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}. \quad (6)$$

Но $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{a}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} - \frac{d^2\boldsymbol{a}}{dt^2}$, так что

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -f\frac{(M+m)}{r^3}\boldsymbol{r}. \quad (7)$$

Число

$$K = f(M+m) \quad (8)$$

назовем *гравитационным параметром пары материальных точек* $(A, M)$ *и* $(P, m)$. Таким образом, движение спутника относительно притягивающего центра определяется уравнением

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0. \quad (9)$$

Бросается в глаза внешнее сходство дифференциальных уравнений общей задачи двух тел и ограниченной задачи двух тел; только $K$ имеет в этих уравнениях различный смысл.

Сравнивая формулы (2) и (8) для $K$, убедимся в том, что притягивающий спутник с массой $m$ движется относительно центрального тела с массой $M$ точно так же, как двигался бы непритягивающий спутник вокруг центрального тела с массой $M+m$.

Заметим, что векторное уравнение (9) равносильно трем скалярным уравнениям для декартовых координат спутника:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+K\frac{x}{r^3}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+K\frac{y}{r^3}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+K\frac{z}{r^3}=0, \tag{10}$$

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{11}$$

В дальнейшем нам предстоит из формул (8) и (9) вывести важные для практики свойства движения спутника: законы Кеплера, уравнение орбиты спутника, зависимость положения спутника на этой орбите от времени.

### Задачи

1. По данным непосредственных измерений ускорение силы тяжести составляет на экваторе $g_э = 9{,}7805$ *м/сек*$^2$ (в силу тяжести включается центробежная сила). Экваториальный радиус Земли $R_э = 6378{,}150$ *км*. По этим данным вычислите гравитационный параметр Земли $K_З$.

2. Масса Юпитера составляет $\frac{1}{1047{,}4}$ от массы Солнца, масса Земли — $\frac{1}{332400}$ от массы Солнца. Считая известным гравитационный параметр Земли $K_З$, подсчитайте гравитационный параметр Юпитера $K_Ю$.

## § 2. ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ. ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

**1.** Покажем, что *движение спутника относительно притягивающего центра все время происходит в одной и той же плоскости, проходящей через притягивающий центр.*

Радиус-вектор спутника $\boldsymbol{r}$ и его скорость $\boldsymbol{v}$ являются функциями времени; пусть в момент $t_0$ $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$. Возможны два случая: 1) векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ неколлинеарны