двух тел; только K имеет в этих уравнениях различный смысл.

Сравнивая формулы (2) и (8) для K, убедимся в том, что притягивающий спутник с массой m движется относительно центрального тела с массой M точно так же, как двигался бы непритягивающий спутник вокруг центрального тела с массой $M+m$.

Заметим, что векторное уравнение (9) равносильно трем скалярным уравнениям для декартовых координат спутника:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+K\frac{x}{r^3}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+K\frac{y}{r^3}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+K\frac{z}{r^3}=0, \tag{10}$$

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{11}$$

В дальнейшем нам предстоит из формул (8) и (9) вывести важные для практики свойства движения спутника: законы Кеплера, уравнение орбиты спутника, зависимость положения спутника на этой орбите от времени.

Задачи

1. По данным непосредственных измерений ускорение силы тяжести составляет на экваторе $g_э = 9{,}7805$ *м/сек*^{2} (в силу тяжести включается центробежная сила). Экваториальный радиус Земли $R_э = 6378{,}150$ *км*. По этим данным вычислите гравитационный параметр Земли $K_З$.

2. Масса Юпитера составляет $\frac{1}{1047{,}4}$ от массы Солнца, масса Земли — $\frac{1}{332400}$ от массы Солнца. Считая известным гравитационный параметр Земли $K_З$, подсчитайте гравитационный параметр Юпитера $K_Ю$.

§ 2. ИНТЕГРАЛ ПЛОЩАДЕЙ. ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

1. Покажем, что *движение спутника относительно притягивающего центра все время происходит в одной и той же плоскости, проходящей через притягивающий центр.*

Радиус-вектор спутника $\boldsymbol{r}$ и его скорость $\boldsymbol{v}$ являются функциями времени; пусть в момент t_0 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$. Возможны два случая: 1) векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ неколлинеарны (то есть не лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых); 2) эти векторы коллинеарны.

Случай 1. Умножая равенство (2.1.9) *) векторно на $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -K\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}).$$

Так как

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2},$$

то

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] = 0, \text{ или } \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}] = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — постоянный вектор. Полагая $t = t_0$, найдем, что

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{v}_0. \tag{2}$$

Умножая (1) почленно на $\boldsymbol{r}$ скалярно, получим

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r} = 0. \tag{3}$$

Итак, в любой момент вектор $\boldsymbol{r}$ (радиус-вектор спутника) перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{\sigma}$. А это значит, что в любой момент времени вектор $\boldsymbol{r}$ лежит в той плоскости (α), которая проходит через притягивающий центр и перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{\sigma}$.

Случай 2. В этом случае также справедливы формулы (1) и (2), но $\boldsymbol{\sigma} = 0$, ибо $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{v}_0$ коллинеарны, и не имеет смысла говорить о какой-то определенной плоскости (α), перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Интуитивно очевидно, что в данном случае спутник движется прямолинейно. Докажем это *строго*. В данном случае

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \equiv 0. \tag{4}$$

Обозначим орт вектора $\boldsymbol{r}$ через $\boldsymbol{p}$, его длину через r, так что

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{p}. \tag{5}$$

---

*) Как мы договорились в предисловии, это означает: глава II, § 1, формула (9).

Дифференцируя $\boldsymbol{r}$ по t, получим

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{p} + r\dot{\boldsymbol{p}}. \tag{6}$$

Но

$$\boldsymbol{p}^2 \equiv 1. \tag{7}$$

Дифференцируя это тождество, получим

$$\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} = 0. \tag{8}$$

Умножая почленно (векторно) равенства (5) и (6) и учитывая (4), найдем

$$r^2 (\boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{p}}) = 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени не было столкновения спутника с центральным телом, то $r \neq 0$ и поэтому

$$\boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{p}} = 0. \tag{9}$$

Используя векторное тождество $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$, получим

$$(\boldsymbol{p} \times \dot{\boldsymbol{p}})^2 = \boldsymbol{p}^2\cdot\dot{\boldsymbol{p}}^2 - (\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{p}})^2.$$

Учитывая (7), (8) и (9), найдем, что $\dot{\boldsymbol{p}} \equiv 0$, то есть $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

Итак, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{c}$, а это и означает, что движение спутника прямолинейное.

2. Формула (1) выражает некоторую зависимость между радиусом-вектором и скоростью спутника. Эту зависимость называют *векторным интегралом площадей* *). Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ называется *векторной константой площадей*.

Пусть (x, y, z) — координаты точки P в некоторой прямоугольной системе координат (с началом в точке A и с осями, постоянно ориентированными в пространстве), $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты (единичные векторы) осей координат Ax, Ay, Az, а σ_1, σ_2, σ_3 — проекции вектора $\boldsymbol{\sigma}$ на эти оси. Тогда

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1\boldsymbol{i} + \sigma_2\boldsymbol{j} + \sigma_3\boldsymbol{k}.$$

*) Ниже это название будет оправдано.

Так как $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \sigma_1 \boldsymbol{i} + \sigma_2 \boldsymbol{j} + \sigma_3 \boldsymbol{k}$, то векторный интеграл площадей (1) переписывается в координатах следующим образом:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = \sigma_1,\ z\dot{x} - x\dot{z} = \sigma_2,\ x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma_3. \tag{10}$$

Уравнение плоскости движения спутника (3) можно записать теперь в более привычной для нас координатной форме:

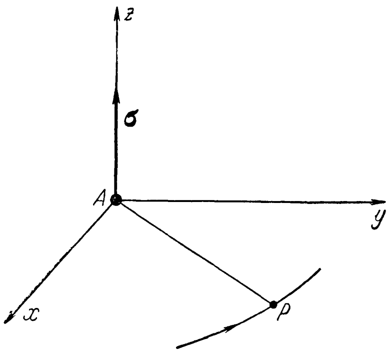

Рис. 2.4.

$$\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0. \tag{11}$$

Введем специальную прямоугольную систему координат, совмещая плоскость Axy с плоскостью орбиты и располагая тройку осей Ax, Ay, Az таким образом, чтобы она образовала правоориентированную систему (рис. 2.4). Тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; обозначим в этом случае σ_3 через σ. Число σ называют *скалярной константой площадей* (или, короче, константой площадей). Ясно, что

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \boldsymbol{k},\ \sigma = \pm |\boldsymbol{\sigma}|. \tag{12}$$

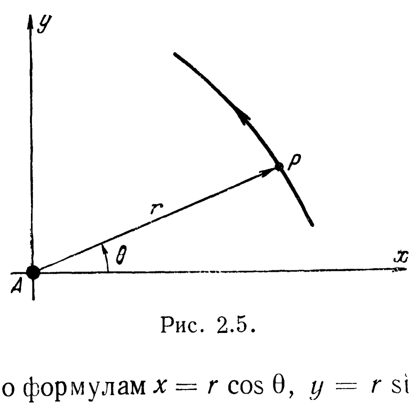

Рис. 2.5.

Так как в этом случае при любом положении спутника $z \equiv 0$, $\dot{z} \equiv 0$, то система (10) сводится к равенству

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \tag{13}$$

Переходя к полярным координатам (рис. 2.5) по формулам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, получим

$$r^2\dot{\theta} = \sigma. \tag{14}$$

Это — *полярная форма интеграла площадей*. Из формулы (14) вытекает несколько важных выводов.

1. Если $\sigma > 0$, то $\dot{\theta} > 0$ (в любой момент времени t). А это значит, что угол θ наклона радиуса-вектора спутника и оси Ax постоянно растет; движение спутника все время происходит в положительном направлении, «против часовой стрелки» (с точки зрения наблюдателя, помещенного на положительном луче оси Az). Аналогично, если $\sigma < 0$, то $\dot{\theta} < 0$, то есть спутник все время движется в отрицательном направлении, «по часовой стрелке». При $\sigma > 0$ движение спутника называется *прямым*, при $\sigma < 0$ — *обратным*.

Примем в дальнейшем, что при $\sigma \neq 0$ *направление осей выбрано таким образом, чтобы движение было прямым*; иначе говоря, ось Az выбрана так, что она одинаково направлена с вектором $\boldsymbol{\sigma}$. При этом условии скалярная константа площадей σ выражается через компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}$ (в любой прямоугольной системе координат) по формуле

$$\sigma = |\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \tag{15}$$

2. Интеграл площадей (14) запишем так: $\dot{\theta} = \sigma/r^2$. Отсюда видно, что *чем дальше спутник от притягивающего центра, тем меньше угловая скорость спутника* (то есть тем медленнее вращается его радиус-вектор вокруг притягивающего центра).

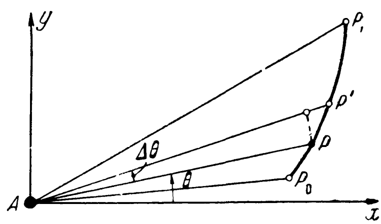

Рис. 2.6.

Проиллюстрируем это таким примером. В январе Земля ближе к Солнцу, чем в июле. Поэтому в январе Земля движется вокруг Солнца с большей угловой скоростью, чем в июле (около 61′10″ в сутки 1 января, около 57′11″ в сутки 1 июля).

3. Интеграл площадей (14) имеет простой физический смысл. Пусть спутник в моменты t и $t + \Delta t$ занимал положения P и P' (рис. 2.6). Между моментами t и $t + \Delta t$ радиус-вектор спутника успел описать некоторый угол $\Delta\theta$ и «замести» некоторую площадь ΔS. С точностью до

бесконечно малых величин порядка выше первого относительно $\Delta\theta$ площадь заметенного сектора ΔS равна $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$, откуда

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

При $\Delta t \to 0$ найдем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \tag{16}$$

Величину dS/dt называют в механике *секториальной скоростью* точки P относительно точки A. Из формулы (14) следует, что

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sigma = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Таким образом, *интеграл площадей означает, что секториальная скорость спутника относительно притягивающего центра постоянна.*

Пусть за промежуток времени от момента t_0 до момента t_1 спутник описал дугу P_0P_1 (рис. 2.6), а радиус-вектор спутника успел замести криволинейный сектор P_0AP_1, площадь которого обозначим через S. Интегрируя уравнение (17) в пределах от t_0 до t_1, получим

$$S = \frac{1}{2}\sigma(t_1 - t_0). \tag{18}$$

Эта формула выражает *второй закон Кеплера*:

Площадь, заметенная радиусом-вектором спутника, пропорциональна времени, в течение которого она заметена.

Иногда этот закон формулируют несколько иначе: *за равные промежутки времени радиус-вектор спутника заметает равные площади.*

Вектор скорости $\boldsymbol{v}$ точки P можно разложить на две составляющие: на радиальную составляющую $\boldsymbol{v}_r$, направленную по прямой AP, и поперечную (трансверсальную) составляющую $\boldsymbol{v}_n$, направленную по прямой PN, нормальной к радиусу-вектору AP (рис. 2.7). В курсах механики устанавливается, что величины этих скоростей определяются по формулам

$$v_r = \dot{r},\ v_n = r\dot{\theta}. \tag{19}$$

Поэтому формулу (14) можно переписать и так:

$$rv_n = \sigma. \tag{20}$$

Пусть φ — угол между радиусом-вектором спутника и вектором его скорости. Тогда $v_n = v \sin\varphi$, где v — абсолютная величина скорости спутника. Формула (14) принимает вид

$$rv \sin\varphi = \sigma = \text{const}. \tag{21}$$

Таким образом, интеграл площадей может быть представлен в нескольких эквивалентных формах. Каждая из этих форм представляет собой аналитическое выражение второго закона Кеплера.

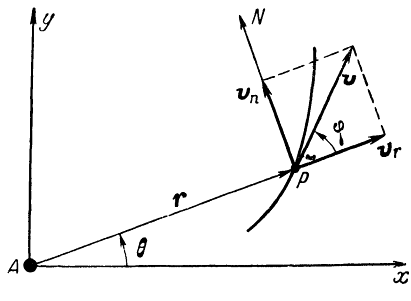

Рис. 2.7.

3. В наших рассуждениях мы исходили из того, что сила притяжения спутника к притягивающему центру определяется по формуле вида $F = fMm/r^2$. В истории механики высказывалось мнение, что эта формула может быть уточнена. Однако каким бы ни был закон непрерывного изменения силы, действующей на спутник и проходящей в каждый момент времени через притягивающий центр, все равно движение спутника будет плоским и будет верен интеграл площадей. Это становится ясным, если заметить, что после замены в формуле (2.1.9) выражения $\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r}$ любой функцией вида $K(x, y, z)\,\boldsymbol{r}$ из (2.1.9) по-прежнему будет вытекать интеграл площадей (1).

В будущем, при определенных режимах работы двигателя космического корабля в окрестности какой-либо звезды (или планеты, или крупного спутника планеты) его тяга может оказаться в течение некоторого времени направленной по прямой, соединяющей корабль с притягивающим центром. В течение этого промежутка времени — как бы ни менялась тяга двигателя по величине — движение спутника будет подчиняться второму закону Кеплера.