§ 3. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

Умножая уравнение

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

скалярно на $2\dot{\boldsymbol{r}}$, получим:

$$2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{2K}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}^2) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}^2).$$

Но

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v},\ \dot{\boldsymbol{r}}^2 = \boldsymbol{v}^2 = v^2,\ \boldsymbol{r}^2 = r^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(r^2) = -\frac{K}{r^3}2r\frac{dr}{dt} = 2K\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2K}{r}\right);$$

откуда

$$v^2 - \frac{2K}{r} = h, \tag{2}$$

где h — некоторая константа (ее называют *константой энергии*). Формула (2) носит название *интеграла энергии* (или интеграла живых сил). Для объяснения этого названия перепишем ее так:

$$\frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{mK}{r}\right) = \frac{mh}{2}.$$

Слагаемое $mv^2/2$ — это кинетическая энергия («живая сила») спутника,— mK/r — его потенциальная энергия (см. главу I, § 1). Формула показывает, что *полная энергия спутника* (то есть сумма его кинетической и потенциальной энергии) в *течение всего времени его движения остается постоянной*.

Константу h можно найти из начальных условий: если в какой-то момент t_0 расстояние спутника от притягивающего центра равно r_0 и абсолютная величина скорости равна v_0, то

$$h = v_0^2 - \frac{2K}{r_0}.$$

Выведем из интеграла энергии простейшие следствия.

1) При удалении спутника от притягивающего центра скорость спутника уменьшается (притягивающий центр тормозит спутник); при приближении спутника к притягивающему центру скорость спутника возрастает (притягивающий центр разгоняет спутник).

Действительно, из (2) видно, что при возрастании r скорость v убывает и, наоборот, при убывании r v возрастает.

2) Пусть спутник в своем движении может удаляться от притягивающего центра неограниченно далеко. Из формулы (2) видно, что при $r \to \infty$ величина скорости будет приближаться к некоторому пределу (v_∞), причем $v_\infty^2 = h$. (Заметим, что этот предельный переход возможен лишь при $h \geqslant 0$.)

Число v_∞ назовем *величиной скорости на бесконечности*.

Итак, в случае $h \geqslant 0$ константа h равна квадрату скорости спутника на бесконечности.

Задачи

1. С поверхности планеты вертикально вверх должна быть запущена высотная ракета-зонд. Планету допустимо рассматривать как шар радиуса R со сферическим распределением плотности. Сопротивлением атмосферы можно пренебречь. Ускорение силы тяжести на поверхности планеты равно g. Какую начальную скорость v_0 у поверхности планеты необходимо сообщить ракете, чтобы она поднялась на высоту H над поверхностью планеты? Получить приближенные формулы для v_0:

а) когда H мало $\left(\frac{H}{R} \to 0\right)$;

б) когда H велико $\left(\frac{H}{R} \to \infty\right)$.

2. Вторая советская космическая ракета, попавшая на Луну 4 сентября 1959 года, имела на расстоянии 320 000 *км* от центра Земли скорость 2,31 *км/сек*. Какую скорость имела она на расстоянии 230 *км* от поверхности Земли?