§ 4. ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА

Будем исходить из полученных ранее соотношений

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

(дифференциальное уравнение движения спутника) и

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{2}$$

(интеграл площадей). Перемножим равенства (1) и (2):

$$\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{r}, \text{ или } \boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{K}{r^3}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}).$$

Преобразуя правую часть при помощи известного векторного тождества

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

получим:

$$\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{K}{r^3}[\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) - \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})].$$

Но $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = r^2$, откуда $\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = r^{\cdot}$. Поэтому

$$\boldsymbol{\sigma} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{K}{r^3}(r^2\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\cdot r\cdot\dot{r}) =$$

$$= -K\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot r - \boldsymbol{r}\cdot\dot{r}}{r^2} = -K\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + K\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 0.$$

Интегрируя, найдем

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{v} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — некоторый постоянный вектор.

Равенство (3) носит название векторного *интеграла Лапласа*. Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ называют *вектором Лапласа*.

Покажем, что *вектор Лапласа ортогонален векторной константе площадей*, то есть что $\boldsymbol{\sigma} \perp \boldsymbol{\lambda}$ или, иначе говоря,

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0. \tag{4}$$

Действительно, так как вектор $\boldsymbol{\sigma}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\sigma}$, то из интеграла Лапласа (3) получим

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\dot{\boldsymbol{r}}) + \frac{K}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{K}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}).$$

Отсюда, на основании (2.2.3), $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$. Последнее равенство, очевидно, означает, что при любом выборе прямоугольной системы координат между тремя компонентами вектора Лапласа (λ_1, λ_2, λ_3) и тремя компонентами векторной константы площадей (σ_1, σ_2, σ_3) существует такая зависимость:

$$\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3 = 0. \tag{5}$$

Так как вектор $\boldsymbol{\sigma}$ ортогонален плоскости орбиты спутника, то перпендикулярный к нему *вектор Лапласа всегда лежит в плоскости этой орбиты.*

Задачи

1. Запишите векторный интеграл Лапласа в координатной форме.
2. Докажите справедливость следующего соотношения:

$$\lambda^2 = K^2 + h\sigma^2, \tag{6}$$

связывающего константы трех интегралов задачи двух тел.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ОРБИТЫ СПУТНИКА

При помощи интеграла площадей и интеграла Лапласа можно получить уравнение орбиты спутника.

Перепишем эти интегралы:

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}. \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай $\boldsymbol{\sigma} = 0$. Тогда из (2)

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{\lambda}}{K}r,$$

а это и есть уравнение прямолинейной орбиты.