Действительно, так как вектор $\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\sigma}$, то из интеграла Лапласа (3) получим

$$-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\dot{\boldsymbol{r}}) + \frac{K}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{K}{r}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}).$$

Отсюда, на основании (2.2.3), $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$. Последнее равенство, очевидно, означает, что при любом выборе прямоугольной системы координат между тремя компонентами вектора Лапласа (λ_1, λ_2, λ_3) и тремя компонентами векторной константы площадей (σ_1, σ_2, σ_3) существует такая зависимость:

$$\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3 = 0. \tag{5}$$

Так как вектор $\boldsymbol{\sigma}$ ортогонален плоскости орбиты спутника, то перпендикулярный к нему *вектор Лапласа всегда лежит в плоскости этой орбиты.*

Задачи

1. Запишите векторный интеграл Лапласа в координатной форме.
2. Докажите справедливость следующего соотношения:

$$\lambda^2 = K^2 + h\sigma^2, \tag{6}$$

связывающего константы трех интегралов задачи двух тел.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ОРБИТЫ СПУТНИКА

При помощи интеграла площадей и интеграла Лапласа можно получить уравнение орбиты спутника.

Перепишем эти интегралы:

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v} + K\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\boldsymbol{\lambda}. \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай $\boldsymbol{\sigma} = 0$. Тогда из (2)

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{\lambda}}{K}r,$$

а это и есть уравнение прямолинейной орбиты.

Пусть теперь $\boldsymbol{\sigma} \neq 0$. Умножая обе части интеграла Лапласа (2) скалярно на вектор $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{v}) + \frac{K}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{r},$$

или

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}) + \frac{K}{r}r^2 = -\lambda r\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{r}$. Воспользовавшись теперь интегралом площадей (1), найдем

$$r(K + \lambda\cos\theta) = \sigma^2.$$

Отсюда видно, что при $\sigma \neq 0$ $K + \lambda\cos\theta \neq 0$ и поэтому

$$r = \frac{\sigma^2}{K + \lambda\cos\theta},$$

то есть

$$r = \frac{\sigma^2/K}{1 + (\lambda/K)\cos\theta}. \tag{3}$$

Положим

$$p = \frac{\sigma^2}{K}, \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{K}. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}. \tag{5}$$

Это и есть *уравнение орбиты спутника* (при $\sigma \neq 0$).

В аналитической геометрии *) устанавливается, что (5) есть уравнение конического сечения в полярных координатах с полюсом в фокусе (рис. 2.8). Фокальный параметр этого конического сечения равен p, а эксцентриситет ра-

*) Для справок относительно терминов и формул из теории конических сечений можно, например, обратиться к справочникам по высшей математике М. Я. Выгодского или И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева.

вен ε. Угол θ также имеет простой смысл — это угол между осью симметрии конического сечения и радиусом-вектором спутника. Мы приходим к следующему выводу, выражающему *первый закон Кеплера*:

Движение спутника относительно притягивающего центра всегда совершается по коническому сечению (по эллипсу, гиперболе, параболе или прямой), причем в одном из фокусов этого конического сечения находится притягивающий центр (рис. 2.9—2.11).

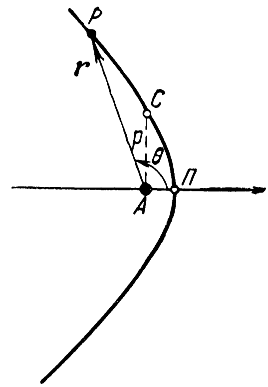

Рис. 2.8.

Из (2.4.6) и (4) следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \tag{6}$$

Таким образом, зная константы K, σ, h (гравитационный параметр притягивающего центра, скалярную константу площадей и константу энергии), легко вычислить эксцентриситет ε орбиты, а также ее фокальный

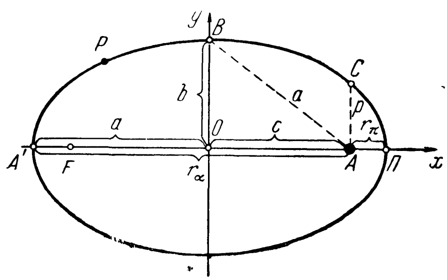

Рис. 2.9.

параметр p [по первой формуле (4)]. А эти два числа полностью определяют форму и размеры орбиты (но, разумеется, не положение ее в пространстве). Из (5) следует, что r принимает наименьшее значение при $\theta = 0$:

$$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}. \tag{7}$$

Ближайшая к притягивающему центру точка *П* орбиты спутника называется *перицентром*. Расстояние перицентра от притягивающего центра можно найти по формуле (7). *Линией* (или осью) *апсид орбиты спутника* называется ось, проходящая через притягивающий центр *А* и перицентр *П* в направлении от *А* к *П*. Направления оси апсид и вектора Лапласа совпадают. Линия апсид служит, очевидно, осью симметрии орбиты.

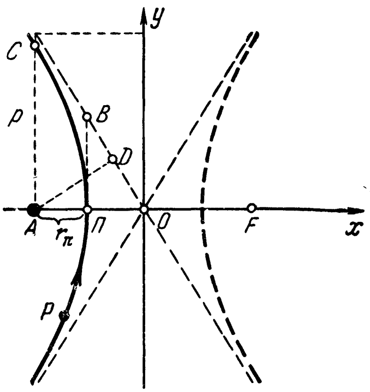

Рис. 2.10.

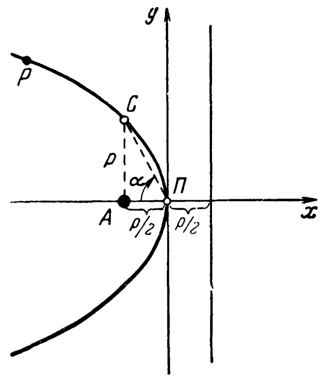

Рис. 2.11.

В случае, когда $0 < \varepsilon < 1$ (орбита является эллипсом), знаменатель в формуле (5) будет при любом θ неотрицательным числом. Свое наименьшее значение этот знаменатель принимает тогда, когда $\cos\theta = -1$, то есть когда $\theta = \pi$. В таком случае r принимает свое *наибольшее* значение. Это максимальное удаление r_α спутника от притягивающего центра определяется по формуле

$$r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon}.$$

Точка A' эллиптической орбиты, наиболее удаленная от притягивающего центра, называется *апоцентром* орбиты спутника. Очевидно, что три точки A', A, $П$ всегда лежат на одной прямой. Перицентр и апоцентр спутника Земли обычно называют перигеем и апогеем, перицентр и апоцентр спутника Солнца — перигелием и афелием, перицентр и апоцентр спутника звезды — периастром и апоастром. Аналогичные названия иногда вводятся и при рассмотрении спутников других небесных тел. Апоцентр и перицентр называют также апсидами орбиты. Среднее арифметическое расстояний от этих двух точек до притягивающего центра, то есть $\frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi)$, называется *средним расстоянием спутника* от притягивающего центра. Оно, очевидно, равно большой полуоси орбиты спутника *):

$$\frac{1}{2}(r_\alpha + r_\pi) = a.$$

Угол θ между линией апсид и радиусом-вектором спутника AP называется *истинной аномалией* спутника в данный момент времени. Этот угол отсчитывается в положительном направлении от линии апсид (то есть от луча $A\Pi$).

Форма и размеры эллиптической орбиты вполне определяются любыми двумя из следующих параметров: p, ε, a, b, c, r_α, r_π и т. п. Если известны два из этих параметров, то по формулам аналитической геометрии можно найти все остальные. Чаще всего используются следующие зависимости:

$$b^2 + c^2 = a^2,\ b = a\sqrt{1-\varepsilon^2},$$
$$p = b^2/a,\ p = a(1-\varepsilon^2).$$

*) Большая полуось a является еще в одном смысле *средним* расстоянием спутника от притягивающего центра: если разделить всю орбиту на m равных дуг, каждую точку деления соединить с притягивающим центром, вычислить среднее арифметическое этих расстояний ρ_m и перейти затем к пределу при $m \to \infty$, то предел («среднедуговое расстояние спутника от притягивающего центра») как раз и будет равен a. Можно себе представить и другие способы образования «средних расстояний спутника P от притягивающего центра». Например, можно разделить полный угол, описываемый радиусом-вектором спутника за один оборот вокруг притягивающего центра A, на m равных углов лучами, исходящими из A, найти среднее арифметическое расстояний спутника от A до точек деления и перейти к пределу при $m \to \infty$. Таким образом, найденное среднеугловое расстояние оказывается равным *малой полуоси* орбиты b. Аналогичным образом можно определить «средневременно́е расстояние спутника от притягивающего центра» — оно оказывается равным $a\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$.

Аналогично обстоит дело и с гиперболической или параболической орбитой *).

П р и м е р. В первые дни после запуска первого советского спутника (4 октября 1957 года) наибольшая высота спутника над поверхностью Земли составляла $H_\alpha = 948$ *км*, наименьшая — $H_\pi = 228$ *км*. Считая Землю шаром радиуса $R = 6371$ *км*, подсчитайте эксцентриситет орбиты этого спутника.

Р е ш е н и е. $r_\alpha = R + H_\alpha$, $r_\pi = R + H_\pi$. Но $r_\alpha = a + c$, $r_\pi = a - c$. Поэтому $2a = r_\alpha + r_\pi$, $2c = r_\alpha - r_\pi$, $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi} = \frac{H_\alpha - H_\pi}{2R + H_\alpha + H_\pi}$. Подставляя числовые данные, найдем $\varepsilon \approx 0{,}05$.

Задачи

1. Среднее расстояние Нептуна от Солнца $a_{\text{Н}}$ составляет 30,1 астрономических единиц [астрономическая единица (а. е.) — это среднее расстояние Земли от центра Солнца, а. е. $\approx 149{,}6 \cdot 10^6$ *км*]. Среднее расстояние Плутона от Солнца $a_{\text{Пл}}$ почти на 10 а. е. больше и составляет 39,5 а. е. Эксцентриситеты орбит Нептуна и Плутона равны соответственно: $\varepsilon_{\text{Н}} = 0{,}009$, $\varepsilon_{\text{Пл}} \approx 0{,}25$. Какая из этих двух планет ближе подходит к Солнцу — Нептун или Плутон?

2. Большая полуось орбиты Земли (при ее движении вокруг Солнца) равна $149{,}6 \cdot 10^6$ *км*, эксцентриситет этой орбиты — $1/_{60}$ (точнее, 0,01678). Вычислите наименьшее и наибольшее расстояния Земли до Солнца.

3. Над каким полушарием больше времени находился первый искусственный спутник Земли в течение первых его оборотов вокруг Земли — над северным или южным? Воспользуйтесь тем, что перигей спутника находился над какой-то точкой северного полушария.

4. Мы уже видели, что среднее арифметическое наибольшего и наименьшего расстояний спутника от притягивающего центра равно большой полуоси его орбиты. Покажите, что среднее геометрическое этих же расстояний r_α и r_π равно малой полуоси орбиты (b), а их среднее гармоническое — фокальному параметру орбиты (p) [средним гармоническим двух чисел x и y называется такое число z, что $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$].

---

*) Заметим, что при выполнении чертежей, необходимых при решении приведенных ниже задач, полезно иметь в виду следующее. Если орбита уже начерчена и требуется указать ее фокус A, то удобно воспользоваться:

а) в случае эллипса (рис. 2.9) — равенством $BA = O\Pi$;

б) в случае гиперболы (рис. 2.10) — равенством $\triangle OAD = \triangle OB\Pi$;

в) в случае параболы (рис. 2.11) — равенством $\operatorname{tg} \angle A\Pi C = 2$.