§ 6. СКОРОСТЬ СПУТНИКА И ЕЕ КОМПОНЕНТЫ

Форма и размеры непрямолинейной орбиты спутника вполне определяются заданием величин p и ε. Пусть нам известны эти величины и гравитационный параметр притягивающего центра (K). Если в какой-то момент времени еще известна истинная аномалия спутника, то можно вычислить и вектор скорости $\boldsymbol{v}$.

Как мы уже отмечали, вектор $\boldsymbol{v}$ можно разложить на две компоненты — радиальную $\boldsymbol{v}_r$ и поперечную $\boldsymbol{v}_n$ (рис. 2.12), причем величины этих компонент определяются по следующим формулам:

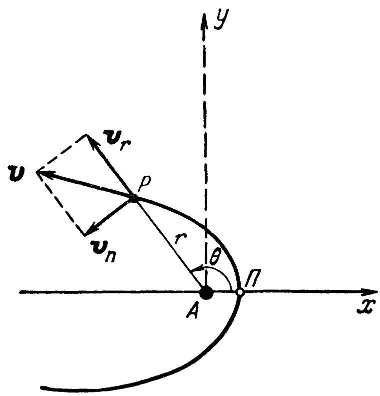

Рис. 2.12.

$$v_r = \dot{r},\ v_n = r\dot{\theta}.$$

Но $r = p/(1 + \varepsilon \cos\theta)$, $r^2\dot{\theta} = \sigma$. Отсюда имеем

$$v_r = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{p\varepsilon \sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\frac{\sigma}{r^2}, \qquad v_n = \frac{\sigma}{r}.$$

Воспользовавшись формулами (2.5.4) и (2.5.5), получим:

$$v_r = \sqrt{\frac{K}{p}}\,\varepsilon\sin\theta = \frac{\sigma}{p}\,\varepsilon\sin\theta, \tag{1}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{K}{p}}\,(1+\varepsilon\cos\theta) = \frac{\sigma}{p}\,(1+\varepsilon\cos\theta). \tag{2}$$

Абсолютная величина скорости спутника $v = \sqrt{v_r^2 + v_n^2}$, то есть

$$v = \sqrt{\frac{K}{p}(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\theta)}. \tag{3}$$

Из формул (1) — (3) вытекает несколько полезных следствий.

1) Из (1) видно, что в перицентре ($\theta=0$) скорость спутника направлена перпендикулярно к его радиусу-вектору (ибо $v_r = 0$) и имеет *наибольшее* из возможных значений:

$$v_{\max} = v_\pi = \sqrt{\frac{K}{p}}(1+\varepsilon). \tag{4}$$

2) В апоцентре (если орбита — эллипс) скорость спутника также направлена перпендикулярно к его радиусу-вектору и имеет *наименьшее* из возможных значений:

$$v_{\min} = v_\alpha = \sqrt{\frac{K}{p}}(1-\varepsilon). \tag{5}$$

3) Если известны масса притягивающего центра, положение спутника относительно притягивающего центра и вектор скорости спутника в какой-то один момент времени, то по этим данным можно определить величину и форму орбиты. Это следует из того факта, что из трех уравнений (2.5.5), (1) и (2) по трем величинам r, v_r, v_n можно определить ε, p.

4) Правило рычага. В случае эллиптической орбиты скорости спутника в перицентре v_π и апоцентре v_α связаны с расстояниями этих точек от притягивающего центра (r_π и r_α) следующей простой зависимостью:

$$\frac{v_\pi}{v_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r_\pi}. \tag{6}$$

Иными словами, скорость спутника в перицентре во столько раз больше скорости спутника в апоцентре, во сколько раз расстояние перицентра от центра притяжения меньше расстояния апоцентра от того же центра притяжения.

Действительно, из рис. 2.9 видно, что

$$r_\alpha = a + c = a(1+\varepsilon),\ r_\pi = a - c = a(1-\varepsilon).$$

Из этих равенств и из (4) и (5) следует формула (6).

Формулу (6) иногда называют *правилом рычага*, ибо она допускает такую наглядно механическую иллюстрацию: если представить себе большую ось эллипса в виде рычага с опорой в точке A и к концам этого рычага A' и Π подвесить гири с весами, численно равными соответственно v_α и v_π, то весы окажутся в равновесии.

Задачи

1. Докажите правило рычага при помощи интеграла площадей.

2. Если космическая ракета на высоте 230 *км* над поверхностью Земли получит параллельно земной поверхности скорость 10 *км/сек*, то апогей ее орбиты окажется примерно на расстоянии 370 000 *км* от центра Земли. Какую скорость будет иметь ракета в апогее?

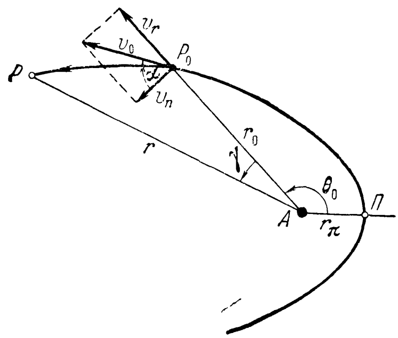

Рис. 2.13.

3. Космический корабль совершает перелет с выключенным двигателем в межпланетном пространстве на таких больших расстояниях от планет, что можно пренебречь их притяжением и учитывать только притяжение корабля к Солнцу. В некоторый («начальный») момент времени t_0, когда корабль находился в точке P_0 на расстоянии r_0 от Солнца, он имел скорость v_0, причем угол между вектором скорости корабля и его поперечной компонентой v_n был в этот момент равен α (рис. 2.13). Найдите истинную аномалию θ_0 корабля в рассматриваемый момент времени t_0, его расстояние от Солнца в момент прохождения через перигелий r_π, эксцентриситет ε и фокальный параметр p орбиты корабля.

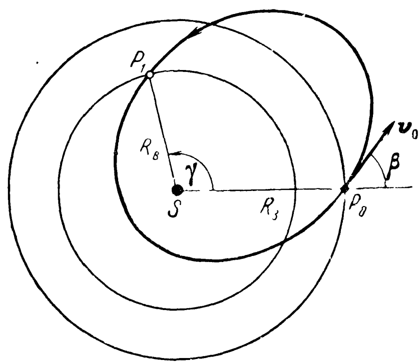

Рис. 2.14.

4. Космический корабль, о котором говорится в условии предыдущей задачи, через некоторое время пришел в точку P на расстоянии r от Солнца (рис. 2.13). За время перелета от P_0 до P радиус-вектор спутника описал угол γ. Для определенности будем полагать, что $0 < \gamma < \pi$. Получите формулы для вычисления угла γ.

5. Космический корабль находится в точке P_0 на орбите Земли. Он должен совершить перелет к орбите Венеры и пройти через заданную точку P_1 на этой орбите. Задана величина угла P_0SP_1 (γ). Примерный вид орбиты и направление полета корабля указаны на рис. 2.14. Каким должен быть угол β между радиусом-вектором корабля и вектором

его скорости v_0 в точке P_0, если перелет должен быть совершен при минимальном значении скорости v_0? Вычислите эту минимальную скорость. Тяготением к Земле и Венере можно пренебречь. Расстояния SP_0 и SP_1 равны соответственно $R_З$ и $R_В$.

6. Решите предыдущую задачу в предположении, что

$$\gamma = 120°,\ R_З = 148 \cdot 10^6\ км,\ R_В = 108 \cdot 10^6\ км.$$

§ 7. ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРА ОРБИТЫ СПУТНИКА ОТ ВЕЛИЧИНЫ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

1. Пусть в какой-то момент времени скорость спутника не коллинеарна его радиусу-вектору. В таком случае спутник будет двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе.

Покажем, что если известны лишь в один момент времени расстояние r_0 спутника от притягивающего центра и абсолютная величина скорости v_0, то уже можно сказать, каков будет характер орбиты (то есть будет ли она эллипсом, гиперболой или параболой). Воспользуемся ранее полученной формулой

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \tag{1}$$

Здесь

$$h = v_0^2 - 2K/r_0.$$

Как известно из аналитической геометрии, орбита будет эллипсом, когда $\varepsilon < 1$. Но $\varepsilon < 1$ тогда и только тогда, когда $h < 0$, то есть при условии

$$v_0^2 < \frac{2K}{r_0}. \tag{2}$$

Аналогично можно показать, что орбита спутника будет параболой в том и только том случае, когда $h = 0$, то есть если

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0}, \tag{3}$$