его скорости v_0 в точке P_0, если перелет должен быть совершен при минимальном значении скорости v_0? Вычислите эту минимальную скорость. Тяготением к Земле и Венере можно пренебречь. Расстояния SP_0 и SP_1 равны соответственно $R_З$ и $R_В$.

6. Решите предыдущую задачу в предположении, что

$$\gamma = 120°,\ R_З = 148\cdot 10^6\ км,\ R_В = 108\cdot 10^6\ км.$$

§ 7. ЗАВИСИМОСТЬ ХАРАКТЕРА ОРБИТЫ СПУТНИКА ОТ ВЕЛИЧИНЫ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

1. Пусть в какой-то момент времени скорость спутника не коллинеарна его радиусу-вектору. В таком случае спутник будет двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе.

Покажем, что если известны лишь в один момент времени расстояние r_0 спутника от притягивающего центра и абсолютная величина скорости v_0, то уже можно сказать, каков будет характер орбиты (то есть будет ли она эллипсом, гиперболой или параболой). Воспользуемся ранее полученной формулой

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \qquad (1)$$

Здесь

$$h = v_0^2 - 2K/r_0.$$

Как известно из аналитической геометрии, орбита будет эллипсом, когда $\varepsilon < 1$. Но $\varepsilon < 1$ тогда и только тогда, когда $h < 0$, то есть при условии

$$v_0^2 < \frac{2K}{r_0}. \qquad (2)$$

Аналогично можно показать, что орбита спутника будет параболой в том и только том случае, когда $h = 0$, то есть если

$$v_0^2 = \frac{2K}{r_0}, \qquad (3)$$

и гиперболой, если $h > 0$, то есть при условии

$$v_0^2 > \frac{2K}{r_0}. \tag{4}$$

2. Мы до сих пор предполагали, что скорость спутника не направлена по прямой, соединяющей притягивающий центр со спутником. *Случай прямолинейного движения* спутника можно рассматривать как предельный для эллиптического, параболического или гиперболического движения. Пусть в какой-то момент t_0 спутник занимает положение P_0 (рис. 2.15) и вектор скорости спутника имеет в этот момент такое же направление, как вектор $\overrightarrow{AP_0}$.

Рис. 2.15.

Если $v_0 < \sqrt{2K/r_0}$, то спутник, достигнув наибольшего удаления от притягивающего центра $r_\alpha = AA'$, начнет падать по прямой на притягивающий центр. Траектория спутника — сложенные вместе два отрезка P_0A' и $A'A$ одной и той же прямой. Отрезок AA' можно рассматривать как предельное положение дуги эллипса с фокусами A и A'. Такое положение получим при условии, что $p \to 0$.

Если $v_0 = \sqrt{2K/r_0}$, то спутник P будет описывать луч, неограниченно удаляясь вдоль прямой AP_0. Эту линию можно рассматривать как предельное положение дуги параболы. При неограниченном удалении от точки A скорость спутника будет иметь своим пределом нуль.

Аналогично, если $v_0 > \sqrt{2K/r_0}$, то спутник также будет описывать луч, неограниченно удаляясь от точки A. При этом скорость будет приближаться к некоторому пределу $v_\infty \neq 0$.

Говорят, что спутник имеет в данный момент времени эллиптическую, параболическую или гиперболическую скорость в зависимости от того, будет ли его скорость удовлетворять условию (2), (3) или (4).

3. Параболическую скорость можно определить как минимальную скорость, которую следует сообщить материальной точке для того, чтобы она могла удалиться на любое сколь угодно большое расстояние от притягивающего центра. На расстоянии r от притягивающего центра параболическая скорость равна

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2K}{r}}. \tag{5}$$

Независимо от того, в каком направлении материальная точка получит такую скорость, она будет удаляться неограниченно от притягивающего центра (если только не столкнется с ним).

При решении задачи о двух телах мы делали упрощающее допущение, что тяготением спутника ко всем телам, кроме одного (центрального тела), возможно пренебречь. Это на практике допустимо лишь в некоторой ограниченной области D пространства. Поэтому практически «удаление на сколь угодно большое расстояние от центрального тела» следует понимать как достижение границы этой области. Получив параболическую или гиперболическую скорость относительно притягивающего центра A, спутник через некоторое время должен подойти к границе той области D, внутри которой еще допустимо пренебречь влиянием на него других тел, кроме тела A.

Так, например, обстояло дело с первой советской космической ракетой, запущенной 2 января 1959 года в сторону Луны. Получив у поверхности Земли гиперболическую скорость, ракета через некоторое время вышла из той области пространства, где допустимо было пренебречь влиянием всех других тел, кроме Земли. Уже через несколько дней своего движения она вошла в область, где решающее влияние на движение ракеты оказывает воздействие Солнца и где тяготение к Земле ничтожно. В новом положении ее движение определяется с достаточной точностью притяжением опять-таки только одного, но уже другого тела — Солнца. Ракета движется вокруг Солнца по орбите, которую без ощутимой ошибки можно считать эллипсом.

4. Рассмотрим теперь частный случай эллиптического движения: когда орбита спутника является окружностью. Скорость, которую должен иметь спутник для того, чтобы его орбита была окружностью, называется *круговой скоростью*. Найдем ее величину и направление.

Пусть спутник находится на расстоянии r_0 от притягивающего центра. В данном случае $\varepsilon = 0$ и в любой момент времени $r = p = r_0$. При помощи формул (2.6.1) и (2.6.2) получим, что $v_r = 0$, $v_n = \sqrt{K/p} = \sqrt{K/r_0}$. Поэтому круговая скорость спутника имеет величину

$$v_0 = \sqrt{\frac{K}{r_0}}. \tag{6}$$

Так как $v_r = 0$, то *круговая скорость направлена перпендикулярно к радиусу-вектору спутника*. Если же спутник имеет скорость, равную по величине $\sqrt{K/r_0}$, но она не перпендикулярна к его радиусу-вектору, то спутник будет описывать эллипс вокруг притягивающего центра (или будет двигаться по отрезку прямой). Эксцентриситет этого эллипса определяется из формул

$$\sigma = r_0 v_0 \sin\varphi = \sqrt{\frac{K}{r_0}}\, r_0 \sin\varphi,$$

$$h = v_0^2 - \frac{2K}{r_0} = -\frac{K}{r_0}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + h\left(\frac{\sigma}{K}\right)^2},$$

где φ — угол между радиусом-вектором спутника и вектором его скорости.

Поэтому

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{K}{r_0}\,\frac{K r_0 \sin^2\varphi}{K^2}} = |\cos\varphi|. \tag{7}$$

Из формул (5) и (6) следует:

$$v_{\text{пар}} = v_{\text{кр}}\sqrt{2} \approx 1{,}4\, v_{\text{кр}}. \tag{8}$$

Можно теперь переписать интеграл энергии (2.3.2) в следующем виде:

$$v^2 = v_{\text{пар}}^2 + h, \tag{9}$$

или

$$v^2 = v_{\text{пар}}^2 + v_\infty^2. \tag{10}$$

5. При рассмотрении спутников реального небесного тела (Земли или другой планеты; Луны или другого естественного массивного спутника какой-либо планеты; Солнца

или какой-либо другой звезды) следует иметь в виду, что это тело не точка, что оно имеет определенные размеры.

В простейших расчетах вместо реального космического тела T рассматривается его модель в виде шара (со сферическим распределением плотности), имеющего такую же массу и такой же объем, как тело T; радиус такого шара называется *средним радиусом* тела T.

Так, например, вместо реальной Земли с ее сложной геометрической и механической структурой рассматривается шар того же объема («земной шар»); радиус этого шара — средний радиус Земли — составляет 6371,0 *км*.

Пусть центральное тело T — идеальный шар (со сферическим распределением плотности) радиуса r_0.

Под *первой космической скоростью* относительно данного космического тела (планеты, звезды и т. п.) понимают круговую скорость v_{I} у поверхности этого тела. Зная первую космическую скорость, легко подсчитать период T_0 обращения так называемого *нулевого спутника* звезды (или планеты), то есть гипотетического спутника, который двигался бы по окружности в непосредственной близости от поверхности небесного тела при допущении, что это тело — идеальный шар.

Под *второй космической скоростью* относительно данного космического тела (звезды, планеты и т. п.) понимают параболическую скорость v_{II} у поверхности космического тела.

П р и м е р 1. Вычислить I и II космические скорости относительно Земли и период T_0 обращения ее нулевого спутника. Пусть $m_З$ — масса Земли. Средний радиус Земли $r_0 = 6371$ *км*, $K = fm_З$. Сила, с которой Земля притягивает массу m, равна $fm_Зm/r_0^2$ и в то же время равна mg_0, где g_0— ускорение свободного падения на поверхности Земли. Отсюда

$$fm_Зm/r_0^2 = mg_0,\ K = fm_З = g_0r_0^2;$$

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{K/r_0} = \sqrt{g_0r_0} = \sqrt{9{,}820\cdot 6371\cdot 10^3} \approx$$

$$\approx 7910\ м/сек \approx 7{,}9\ км/сек;$$

$$v_{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{I}}\sqrt{2} \approx 7910\cdot 1{,}414 \approx 11{,}2\ км/сек.$$

Так как длину большой окружности на поверхности Земли можно принять равной (в среднем) 40 030 *км*, то $T_0 = 40\,030/7{,}910 \approx 5060$ *сек* $= 84^1/_3$ *мин*.

Разумеется, на практике невозможно запустить нулевой спутник. Однако данные о таком воображаемом спутнике (его период обращения T_0, радиус его орбиты r_0, первая космическая скорость v_{I}) могут быть использованы в качестве эталона при вычислении данных о других, реальных спутниках *). Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Какова круговая скорость $v_{\text{кр}}$ и период обращения T спутника, вращающегося на расстоянии r от центра Земли?

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{K}{r}} = \sqrt{\frac{K}{r_0}}\sqrt{\frac{r_0}{r}} = v_{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{r_0}{r}}, \qquad (11)$$

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\text{кр}}} = \frac{2\pi r_0}{v_{\mathrm{I}}}\frac{r}{r_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}} = T_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/2}. \qquad (12)$$

Отсюда, между прочим, видно, что с удалением от центра Земли круговая скорость спутника убывает (а значит, убывает и пропорциональная ей параболическая скорость), а его период обращения возрастает.

Более полезным, чем нулевой спутник, в роли эталона оказался бы круговой спутник Земли, вращающийся на высоте около 170—300 *км* (например, на высоте 230 *км*, то есть на расстоянии 6600 *км* от центра Земли).

Задачи

1. Спутник Солнца находится на расстоянии $149{,}6 \cdot 10^6$ *км* от центра Солнца. Найдите круговую и параболическую скорости относительно Солнца на этом расстоянии.

2. Какую скорость должен получить круговой спутник Земли, обращающийся в плоскости экватора, для того чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом экватора? На какой высоте должен быть запущен такой «суточный» спутник?

3. Советская космическая ракета, запущенная 12 сентября 1960 года и попавшая в Луну, имела на расстоянии 320 000 *км* от центра Земли скорость около 2,31 *км/сек* относительно Земли. Считая, что движение ракеты происходило (от конца пассивного участка до момента удаления

---

*) Заметим, что во многих популярных книгах по космонавтике в качестве радиуса орбиты нулевого спутника Земли принимают экваториальный радиус Земли. Разумеется, от этого нулевой спутник не становится более реальным, более осуществимым.

на расстояние в 320 000 *км*) по коническому сечению, определите, была траектория ракеты эллиптической, гиперболической или параболической.

4. Орбиту Луны можно в первом приближении считать окружностью радиуса $R \approx 384\,400$ *км* $\approx 60r_0$ (r_0 — радиус Земли). Найдите круговую скорость $v_{\text{кр}}$ и параболическую скорость $v_{\text{пар}}$ (относительно Земли) в точках этой орбиты.

5. Вычислите I и II космические скорости относительно Луны.

6. Вычислите линейную скорость и период обращения кругового спутника, двигающегося на расстоянии 6600 *км* от центра Земли.

§ 8. ЭЛЛИПС И ГИПЕРБОЛА С ЕДИНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Некоторые важные свойства движения спутника формулируются и доказываются по-разному в зависимости от того, будет ли движение эллиптическим или гиперболическим. Однако можно дать такой аналитический подход к этим кривым, который позволит получить *единый* вывод свойств обоих видов движения.

Для этого воспользуемся некоторыми элементарными сведениями из теории функций комплексного переменного. Тригонометрические функции $\cos Z$ и $\sin Z$ и показательную функцию e^Z рассматривают в математике не только при вещественных, но и при произвольных комплексных значениях Z *), определяя их как суммы бесконечных степенных рядов:

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^n}{n!} + \ldots;$$

отсюда легко получить известные формулы Эйлера

$$e^{iZ} = \cos Z + i \sin Z,$$

$$\cos Z = \frac{1}{2}\left(e^{iZ} + e^{-iZ}\right), \qquad \sin Z = \frac{1}{2i}\left(e^{iZ} - e^{-iZ}\right).$$

*) См., например, А. Ф. Бермант, Краткий курс математического анализа, Физматгиз, 1963, или [0.20].