на расстояние в 320 000 *км*) по коническому сечению, определите, была траектория ракеты эллиптической, гиперболической или параболической.

4. Орбиту Луны можно в первом приближении считать окружностью радиуса $R \approx 384\,400$ *км* $\approx 60r_0$ (r_0 — радиус Земли). Найдите круговую скорость $v_{\text{кр}}$ и параболическую скорость $v_{\text{пар}}$ (относительно Земли) в точках этой орбиты.

5. Вычислите I и II космические скорости относительно Луны.

6. Вычислите линейную скорость и период обращения кругового спутника, двигающегося на расстоянии 6600 *км* от центра Земли.

§ 8. ЭЛЛИПС И ГИПЕРБОЛА С ЕДИНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Некоторые важные свойства движения спутника формулируются и доказываются по-разному в зависимости от того, будет ли движение эллиптическим или гиперболическим. Однако можно дать такой аналитический подход к этим кривым, который позволит получить *единый* вывод свойств обоих видов движения.

Для этого воспользуемся некоторыми элементарными сведениями из теории функций комплексного переменного. Тригонометрические функции $\cos Z$ и $\sin Z$ и показательную функцию e^Z рассматривают в математике не только при вещественных, но и при произвольных комплексных значениях Z *), определяя их как суммы бесконечных степенных рядов:

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \ldots + \frac{Z^n}{n!} + \ldots;$$

отсюда легко получить известные формулы Эйлера

$$e^{iZ} = \cos Z + i \sin Z,$$

$$\cos Z = \frac{1}{2}(e^{iZ} + e^{-iZ}), \qquad \sin Z = \frac{1}{2i}(e^{iZ} - e^{-iZ}).$$

---

*) См., например, А. Ф. Бермант, Краткий курс математического анализа, Физматгиз, 1963, или [0.20].

Из этих формул вытекает, например, что при *любом комплексном* Z

$$\cos^2 Z + \sin^2 Z = 1.$$

По аналогии с тригонометрическими функциями определяются и так называемые гиперболические функции $\operatorname{ch} Z$ и $\operatorname{sh} Z$:

$$\operatorname{ch} Z = \frac{1}{2}(e^Z + e^{-Z}), \quad \operatorname{sh} Z = \frac{1}{2}(e^Z - e^{-Z}).$$

Легко проверить, что при любом t

$$\cos it = \operatorname{ch} t, \ \sin it = i \operatorname{sh} t.$$

При изменении вещественного t от 0 до ∞ и от 0 до $-\infty$ $\operatorname{ch} t$ монотонно возрастает от 1 до ∞, при изменении t от $-\infty$ до ∞ $\operatorname{sh} t$ растет от $-\infty$ до ∞.

2. Пусть a и b — два каких-либо постоянных числа. Рассмотрим два уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos Z, \\ y &= b\sin Z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

при двух различных предположениях относительно a, b, Z.

Случай 1. $a \geqslant b > 0$, Z пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞.

Случай 2. $a < 0, b = -i\,|b|, Z = iH$, H пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞.

Нетрудно проверить, что не только в случае 1, но и в случае 2 x и y — вещественные числа. Ясно также, что точка P, координаты которой определяются формулами (1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Но (2) — это уравнение *эллипса* в случае 1, а в случае 2 (когда $b = -i|b|$) — это уравнение *гиперболы*:

$$\frac{x^2}{|a|^2} - \frac{y^2}{|b|^2} = 1. \tag{3}$$

В случае 1, когда Z пробегает вещественные значения от 0 до 2π, точка P $(a \cos Z,\ b \sin Z)$ описывает эллипс (рис. 2.9), перемещаясь по нему против часовой стрелки. При изменении Z от $-\infty$ до $+\infty$ точка P многократно описывает этот эллипс.

В случае 2 при изменении H от $-\infty$ до $+\infty$ точка P $(|a| \operatorname{ch} H,\ b \operatorname{sh} H)$ опишет левую ветвь гиперболы в направлении, указанном стрелкой на рис. 2.10.

Введем еще число c по формуле

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{4}$$

Как в случае 1, так и в случае 2 подкоренное выражение — вещественное неотрицательное число. Условимся в качестве значения корня брать его неотрицательное значение, если b — вещественное число (случай 1), и отрицательное значение корня, если b — мнимое число (случай 2) *). При таком выборе знаков мы получим, что в случае 1 геометрическим местом точек плоскости, сумма расстояний которых от точки A $(c, 0)$ и F $(-c, 0)$ равна $2a$, является эллипс (рис. 2.9), заданный формулой (2). В случае 2 геометрическим местом точек P, для которых разность расстояний от точек A $(c, 0)$ и F $(-c, 0)$ равна $2a$ (то есть для которых $AP - FP = 2a$), есть *левая* ветвь гиперболы (рис. 2.10). Нетрудно проверить, что в принятых нами обозначениях многие формулы для эллипса и гиперболы оказываются *едиными*, например:

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad r_\pi = a - c = a\,(1 - \varepsilon).$$

В дальнейшем мы воспользуемся тем, что все формулы, логически вытекающие из единых формул для эллипса и гиперболы, также будут иметь один и тот же вид для кривых обоих типов. Число a, входящее в единые уравнения эллипса и гиперболы (1), назовем *главной полуосью* соответствующей кривой. Как видно из предыдущего, главная полуось эллипса положительна (она равна длине его большой полуоси), а главная полуось гиперболы отрицательна (она равна

*) Число c имеет простой геометрический смысл: это абсцисса фокуса A эллипса или гиперболы.

длине вещественной полуоси гиперболы, взятой со знаком минус). Примем, что при $\varepsilon > 1$ $\sqrt{1-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon - 1}$, причем $\sqrt{\varepsilon - 1} > 0$, $\sqrt{\varepsilon + 1} > 0$ (берутся положительные значения корней). При таких условиях и для гиперболы остается справедливой формула $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

§ 9. СВЯЗЬ КОНСТАНТЫ ЭНЕРГИИ СПУТНИКА С ВЕЛИЧИНОЙ ГЛАВНОЙ ПОЛУОСИ ЕГО ОРБИТЫ

1. В § 3 мы получили интеграл энергии

$$v^2 = \frac{2K}{r} + h. \tag{1}$$

Если спутник находится в перицентре, то $r = r_\pi$, $v = v_\pi$ и поэтому

$$h = v_\pi^2 - \frac{2K}{r_\pi}. \tag{2}$$

Воспользуемся следующими формулами (см. §§ 5—6):

$$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon), \quad v_\pi = \sqrt{\frac{K}{p}}(1+\varepsilon).$$

Тогда из (2) следует, что

$$h = \frac{K}{p}(1+\varepsilon)^2 - \frac{2K}{r_\pi} = \frac{K}{r_\pi}(1+\varepsilon) - \frac{2K}{r_\pi} = -\frac{K}{r_\pi}(1-\varepsilon),$$

то есть

$$h = -\frac{K}{a}. \tag{3}$$

Теперь интеграл энергии можно записать в ином виде:

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{4}$$

или

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1-\varepsilon}{r_\pi}\right). \tag{5}$$

Последние формулы верны как для эллипса ($a > 0$), так и для гиперболы ($a < 0$); они верны и для параболы ($a = \infty$; $\varepsilon = 1$). В случае гиперболической орбиты $a = -|a|$,