длине вещественной полуоси гиперболы, взятой со знаком минус). Примем, что при $\varepsilon > 1$ $\sqrt{1-\varepsilon} = i\sqrt{\varepsilon - 1}$, причем $\sqrt{\varepsilon - 1} > 0$, $\sqrt{\varepsilon + 1} > 0$ (берутся положительные значения корней). При таких условиях и для гиперболы остается справедливой формула $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

§ 9. СВЯЗЬ КОНСТАНТЫ ЭНЕРГИИ СПУТНИКА С ВЕЛИЧИНОЙ ГЛАВНОЙ ПОЛУОСИ ЕГО ОРБИТЫ

1. В § 3 мы получили интеграл энергии

$$v^2 = \frac{2K}{r} + h. \tag{1}$$

Если спутник находится в перицентре, то $r = r_\pi$, $v = v_\pi$ и поэтому

$$h = v_\pi^2 - \frac{2K}{r_\pi}. \tag{2}$$

Воспользуемся следующими формулами (см. §§ 5—6):

$$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon), \; v_\pi = \sqrt{\frac{K}{p}}(1+\varepsilon).$$

Тогда из (2) следует, что

$$h = \frac{K}{p}(1+\varepsilon)^2 - \frac{2K}{r_\pi} = \frac{K}{r_\pi}(1+\varepsilon) - \frac{2K}{r_\pi} = -\frac{K}{r_\pi}(1-\varepsilon),$$

то есть

$$h = -\frac{K}{a}. \tag{3}$$

Теперь интеграл энергии можно записать в ином виде:

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{4}$$

или

$$v^2 = K\left(\frac{2}{r} - \frac{1-\varepsilon}{r_\pi}\right). \tag{5}$$

Последние формулы верны как для эллипса ($a > 0$), так и для гиперболы ($a < 0$); они верны и для параболы ($a = \infty$; $\varepsilon = 1$). В случае гиперболической орбиты $a = -|a|$,

$h = v_\infty^2$; поэтому

$$v_\infty^2 = \frac{K}{|a|}. \tag{6}$$

В случае эллипса $2a - r = r_1$, где r_1 — расстояние спутника до «пустого» фокуса F, в котором не находится притягивающий центр (этот фокус иногда называют «антифокусом»). Известно, что $K/r = v_{\text{кр}}^2$, где $v_{\text{кр}}$ — местная круговая скорость в той точке, где находится спутник. Поэтому

$$v^2 = \frac{K(2a-r)}{ra} = \frac{K}{r}\frac{r_1}{a} = v_{\text{кр}}^2 \frac{r_1}{a},$$

$$v = v_{\text{кр}} \sqrt{\frac{r_1}{a}}. \tag{7}$$

Эту формулу можно записать так:

$$v = v_{\text{кр}} \sqrt{r_1/|a|}. \tag{8}$$

В таком виде она верна и для гиперболы.

Пример. Высота перигея третьего советского ИСЗ в первые дни после запуска (май 1958 года) была равна $H_\pi = 226$ *км*, высота апогея спутника $H_\alpha = 1880$ *км*. Какова была скорость этого спутника при прохождении через его перигей и апогей?

Решение. $v_\pi^2 = K\left(\frac{2}{r_\pi} - \frac{1}{a}\right) = K\frac{2a - r_\pi}{ar_\pi} = \frac{K}{a}\frac{r_\alpha}{r_\pi}$.

Но $K = gr_0^2$, где r_0 — радиус Земли. Поэтому

$$v_\pi^2 = \frac{2gr_0^2}{2r_0 + H_\alpha + H_\pi} \cdot \frac{r_0 + H_\alpha}{r_0 + H_\pi}.$$

v_α найдем по правилу рычага: $v_\alpha r_\alpha = v_\pi r_\pi$. В нашем случае $r_0 = 6371$ *км*, $H_\alpha = 1880$ *км*, $H_\pi = 226$ *км*. После вычислений получим $v_\pi = 8{,}2$ *км/сек*, $v_\alpha = 6{,}6$ *км/сек*.

2. Пользуясь интегралом энергии в форме (4), можно сделать некоторые любопытные выводы о движении спутника по гиперболической орбите на больших расстояниях от притягивающего центра (то есть при больших r).

Заметим сначала, что если r велико́ (по сравнению с $|a|$), то точки гиперболической орбиты, через которые проходит спутник, близки к асимптоте этой гиперболы. А это значит, что при больших r спутник практически движется *прямолинейно*.

Покажем теперь, что при больших r по гиперболической орбите спутник движется практически *равномерно* со скоростью v_∞.

Формулу (4) можно в случае гиперболического движения переписать таким образом:

$$v = \sqrt{K}\sqrt{\frac{2}{r} + \frac{1}{|a|}}. \tag{9}$$

Отсюда при $r \to \infty$ найдем

$$v_\infty = \sqrt{K/|a|}, \text{ то есть } |a| = K/v_\infty^2. \tag{10}$$

Поэтому

$$v = \sqrt{K\left(\frac{2}{r} + \frac{v_\infty^2}{K}\right)} = v_\infty\sqrt{\frac{2K}{rv_\infty^2} + 1} <$$
$$< v_\infty\sqrt{1 + 2\frac{K}{rv_\infty^2} + \left(\frac{K}{rv_\infty^2}\right)^2} = v_\infty\left(1 + \frac{K}{rv_\infty^2}\right).$$

Итак,

$$v_\infty < v < v_\infty + \frac{K}{rv_\infty}, \tag{11}$$

или

$$0 < v - v_\infty < \frac{K}{rv_\infty}. \tag{12}$$

Пусть при движении вдоль какого-либо участка его орбиты все время выполняется неравенство $r > r_0$. Тогда

$$0 < v - v_\infty < \frac{K}{r_0 v_\infty}. \tag{13}$$

Если спутник движется далеко от притягивающего центра, то $K/(r_0 v_\infty)$ мало. А это значит, что на больших расстояниях от притягивающего центра спутник движется практически *равномерно* со скоростью v_∞. Эти соображения можно использовать для примерной оценки времени движения спутника на участках гиперболической орбиты, далеких от центрального тела.

Действительно, пусть спутник движется по дуге P_0P_1 гиперболической орбиты, причем эта дуга расположена настолько далеко от притягивающего центра, что практически допустимо считать движение спутника по этой дуге прямолинейным. Пусть $AP_0 = r_0$, $AP_1 = r_1$. Длину дуги P_0P_1 можно приближенно считать равной $r_1 - r_0$.

Скорость v спутника в любой момент времени будет заключена между v_∞ и $v_\infty + K/(r_0 v_\infty)$. Поэтому время для перелета вдоль дуги P_0P_1 будет практически заключено между числом $(r_1 - r_0)/v_\infty$ и числом $\dfrac{r_1 - r_0}{v_\infty} \Big/ \left(1 + \dfrac{K}{r_0 v_\infty^2}\right)$, которое близко к числу $\dfrac{r_1 - r_0}{v_\infty}\left(1 - \dfrac{K}{r_0 v_\infty^2}\right)$. Следовательно, если примем, что спутник потратил на перелет по дуге P_0P_1 время

$$\tau = \frac{r_1 - r_0}{v_\infty}, \tag{14}$$

то за предел относительной погрешности можно принять число

$$\delta = \frac{K}{r_0 v_\infty^2}. \tag{15}$$

Такая оценка является *завышенной*. В действительности относительная погрешность будет меньше, как это видно из следующих соображений. Время $t_1 - t_0$ перелета вдоль дуги P_0P_1 можно считать равным

$$t_1 - t_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v}.$$

В силу неравенства (11) имеем

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v_\infty\left(1 + \dfrac{K}{r v_\infty^2}\right)} < t_1 - t_0 < \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v_\infty}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{v_\infty\left(1+\frac{K}{rv_\infty^2}\right)} = \tau - \frac{K}{v_\infty^3} \ln \frac{r_1 + K/v_\infty^2}{r_0 + K/v_\infty^2}.$$

Но $\frac{r_1 + K/v_\infty^2}{r_0 + K/v_\infty^2} < \frac{r_1}{r_0}$, если $r_1 > r_0$. Поэтому за границу абсолютной погрешности приближения $t_1 - t_0 \approx \tau$ можно принять число

$$\Delta\tau = \frac{K}{v_\infty^3} \ln \frac{r_1}{r_0}. \tag{16}$$

Иначе говоря,

$$\tau - \frac{K}{v_\infty^3} \ln \frac{r_1}{r_0} < t_2 - t_1 < \tau. \tag{17}$$

Границей относительной погрешности будет служить число $\Delta\tau/\tau$, то есть число

$$\delta = \frac{K}{v_\infty^2} \frac{\ln (r_1/r_0)}{r_1 - r_0}. \tag{18}$$

А это число меньше, чем $K/(v_\infty^2 r_0)$ (в силу известного неравенства $\ln(1 + \alpha) < \alpha$ при $\alpha > 0$).

Пример. Как сообщило ТАСС (см. «Правду» за 26 февраля 1961 года), советская автоматическая межпланетная станция (АМС), посланная в сторону Венеры 12 февраля 1961 года, находилась 13 февраля в 12 часов дня (по московскому времени) на расстоянии 488 900 *км* от Земли (будем считать, что от поверхности Земли). Согласно данным из сообщения ТАСС, скорость v_∞ можно считать равной 4,0 *км/сек*. Через сколько времени АМС удалилась от центра Земли на расстояние, равное 1 000 000 *км*? (Предполагается, что влиянием Солнца на движение АМС можно в этих расчетах пренебречь.)

Решение. Так как радиус Земли равен 6370 *км*, то можно считать $r_0 = 495\,000$ *км*, $r_1 = 1\,000\,000$ *км*. Имеем

$$\tau = \frac{r_1 - r_0}{v_\infty} = \frac{505\,000}{4{,}0} \approx 126\,200 \text{ сек} \approx 35 \text{ час.}$$

Следовательно, на расстоянии в 1 млн. *км* от центра Земли АМС была 14 февраля около 23 часов (по московскому времени). Эта дата и приведена в том же сообщении ТАСС.

Оценим абсолютную погрешность по формуле (16):

$$\frac{K}{v_\infty^2} = \frac{398\,600}{4{,}0^2} \approx 25\,000 \text{ км}, \quad \frac{K}{v_\infty^3} \approx 6250,$$

$$\Delta\tau \leqslant 6250 \ln \frac{10^6}{495 \cdot 10^3} < 6250 \ln 2{,}1 <$$

$$< 6250 \cdot \frac{3}{4} < 4800 \text{ сек} = 1{,}5 \text{ час.}$$

Таким образом, величина $t_1 - t_0$ вычислена с погрешностью, не превосходящей полутора часов: АМС оказалась на расстоянии 10^6 *км* от Земли 14 февраля между 21 час. 30 мин. и 23 часами по московскому времени.

Задачи

1. Зная скорость v_π спутника Земли в перигее и перигейное расстояние спутника r_π, вычислите его апогейное расстояние r_α и апогейную скорость v_α.

2. Найдите наибольшую и наименьшую скорость, с которой движется Земля вокруг Солнца. Сравните эти скорости со средней скоростью движения Земли вокруг Солнца (то есть с той скоростью, которую имела бы Земля, если бы она двигалась вокруг Солнца по окружности с радиусом, равным среднему расстоянию от Земли до Солнца). Эксцентриситет ε орбиты Земли равен $^1/_{60}$, а среднее расстояние Земли до Солнца — $149{,}6 \cdot 10^6$ *км*.

3. Какую минимальную начальную скорость необходимо сообщить космолету параллельно поверхности Земли на высоте 230 *км* для того, чтобы он мог попасть в Луну в ее апогее? Притяжением Луны пренебречь.

Решите ту же задачу для случая попадания в Луну в ее перигее. Среднее расстояние Луны от Земли $a_Л = 384\,400$ *км*, эксцентриситет лунной орбиты $\varepsilon = 0{,}055 \approx {}^1/_{18}$.

4. Докажите, что при прохождении спутника, движущегося по эллиптической орбите, через конец ее малой оси скорость спутника равна по абсолютной величине местной круговой скорости.

5. Для того чтобы спутник мог длительное время обращаться вокруг планеты, он не должен приближаться к ее поверхности ближе, чем на расстояние h (в противном случае он быстро сгорит в ее атмосфере). Спутник выходит на эллиптическую орбиту в точке B на высоте $H > h$ над поверхностью планеты со скоростью, направленной параллельно

этой поверхности. В каких пределах должна находиться величина начальной скорости для того, чтобы спутник мог длительное время обращаться вокруг планеты (то есть, чтобы $r_\pi \geqslant h$)? Планета сферической структуры.

6. Спутник, движущийся по гиперболической орбите (рис. 2.10), приближается к звезде с весьма большого расстояния (из «бесконечности»). На больших расстояниях от звезды («на бесконечности») он движется практически прямолинейно — по асимптоте к своей орбите, отстоящей от звезды на известном расстоянии d, и имеет скорость $\boldsymbol{v}_1$, причем $|\boldsymbol{v}_1| = v_\infty$. После прохождения через периастр Π спутник будет неограниченно удаляться от звезды и на достаточно больших расстояниях от нее («на бесконечности») он опять будет двигаться практически по прямой со скоростью $\boldsymbol{v}_2$ ($|\boldsymbol{v}_2| = v_\infty$). Вычислите угол λ между векторами $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (то есть угол, на который повертывается вектор скорости спутника в результате воздействия звезды). Гравитационный параметр K звезды известен.

7. Ракета запускается под углом φ к вертикали на расстоянии R от центра Земли. Найдите минимальную начальную скорость v, которую следует сообщить ракете для того, чтобы она удалилась от центра Земли на данное расстояние d. Выведите формулы для большой полуоси и эксцентриситета орбиты ракеты.

8. Ракета получила на высоте H над поверхностью Земли некоторую начальную скорость $\boldsymbol{v}_0$, направленную под углом ψ к горизонту. Какова должна быть величина этой начальной скорости для того, чтобы перигейное расстояние ракеты было равно заданной величине h ($h < H$)?

9. Советская автоматическая межпланетная станция (АМС), посланная к Венере 12 февраля 1961 года, стартовала с борта космической ракеты. В момент отделения от ракеты скорость АМС превышала местную параболическую скорость на $d = 661$ *м/сек*. Кроме того, известно, что АМС на расстоянии $r_0 = 488\,900$ *км* от поверхности Земли имела скорость $v_0 = 4{,}050$ *км/сек*. На какой высоте H над поверхностью Земли отделилась АМС от несшей ее космической ракеты? Какую скорость имела АМС в этот момент? Вычислите длину главной полуоси орбиты АМС. Была ли орбита АМС вблизи Земли эллиптической, гиперболической или параболической?

10. При прохождении через некоторую точку P, отстоящую от звезды A на расстоянии r_0, спутник звезды имел скорость v_0. Местная параболическая скорость в точке P равна $v_{\text{пар}}$. Вычислите главную полуось a орбиты спутника.

11. При прохождении через периастр спутник P звезды A имел скорость v_0. Местная круговая скорость $v_{\text{кр}}$ в периастре известна. Вычислите эксцентриситет орбиты спутника.

12. Спутник P звезды A при прохождении через точку P_0 своей эллиптической орбиты отстоял от центра звезды на расстоянии r_0 и имел скорость v_0. Известно, что если бы в этот момент скорость спутника $\boldsymbol{v}_0$ была перпендикулярна к его радиусу-вектору $\overrightarrow{AP_0}$, то орбита спутника имела бы эксцентриситет ε_0. В действительности же вектор скорости спутника v_0 образует с радиусом-вектором спутника угол α. Местная круговая скорость $v_{\text{кр}}$ в точке P_0 известна. Найдите эксцентриситет ε

орбиты спутника и его периастральное расстояние r_π (расстояние от периастра до центра звезды).

13. Космолет движется (с выключенным двигателем) в поле тяготения звезды A, имеющей гравитационный параметр K. В момент прохождения космолета через некоторую точку C его скорость была равна v и направлена под углом φ к радиусу-вектору космолета $\overrightarrow{AC}$. Местная круговая скорость в точке C равна $v_{\text{кр}}$. Какова истинная аномалия θ космолета в момент прохождения через точку C, если известно, что $0<\theta<\pi$?

14. Космолет P, совершающий перелет с орбиты Земли к орбите Марса, находится на расстоянии $150\cdot 10^6$ *км* от Солнца (A) и притом настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Скорость космолета относительно Солнца в этот момент равна 35,0 *км/сек* и направлена под углом 60° к радиусу-вектору $\overrightarrow{AP}$. Вычислите истинную аномалию космолета при прохождении через точку P.

§ 10. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

1. В этом параграфе будет идти речь только об эллиптическом движении. *Периодом обращения* спутника вокруг притягивающего центра называют время T между двумя последовательными моментами прохождения спутника через его перицентр. Пусть τ — время, прошедшее с момента t_0 прохождения спутника через перицентр Π, s — площадь, заметенная радиусом-вектором спутника в течение этого времени. По второму закону Кеплера $s=\frac{1}{2}\sigma\tau$. Когда спутник совершит один полный оборот вокруг притягивающего центра, то от момента t_0 его прохождения через перицентр пройдет время T (где T — период обращения спутника), а радиус-вектор спутника успеет замести весь эллипс и притом один раз. Площадь этого эллипса, как известно, равна πab, следовательно,

$$\pi ab=\frac{1}{2}\sigma T,$$

$$T=\frac{2\pi ab}{\sigma}=\frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{p}}=\frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{b^2/a}},$$

то есть

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}a^{3/2}. \tag{1}$$