орбиты спутника и его периастральное расстояние r_π (расстояние от периастра до центра звезды).

13. Космолет движется (с выключенным двигателем) в поле тяготения звезды A, имеющей гравитационный параметр K. В момент прохождения космолета через некоторую точку C его скорость была равна v и направлена под углом φ к радиусу-вектору космолета $\overrightarrow{AC}$. Местная круговая скорость в точке C равна $v_{\text{кр}}$. Какова истинная аномалия θ космолета в момент прохождения через точку C, если известно, что $0 < \theta < \pi$?

14. Космолет P, совершающий перелет с орбиты Земли к орбите Марса, находится на расстоянии $150 \cdot 10^6$ *км* от Солнца (A) и притом настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Скорость космолета относительно Солнца в этот момент равна 35,0 *км/сек* и направлена под углом 60° к радиусу-вектору $\overrightarrow{AP}$. Вычислите истинную аномалию космолета при прохождении через точку P.

§ 10. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

1. В этом параграфе будет идти речь только об эллиптическом движении. *Периодом обращения* спутника вокруг притягивающего центра называют время T между двумя последовательными моментами прохождения спутника через его перицентр. Пусть τ — время, прошедшее с момента t_0 прохождения спутника через перицентр Π, s — площадь, заметенная радиусом-вектором спутника в течение этого времени. По второму закону Кеплера $s = \frac{1}{2}\sigma\tau$. Когда спутник совершит один полный оборот вокруг притягивающего центра, то от момента t_0 его прохождения через перицентр пройдет время T (где T — период обращения спутника), а радиус-вектор спутника успеет замести весь эллипс и притом один раз. Площадь этого эллипса, как известно, равна πab, следовательно,

$$\pi ab = \frac{1}{2}\sigma T,$$

$$T = \frac{2\pi ab}{\sigma} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{p}} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{b^2/a}},$$

то есть

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} a^{3/2}. \tag{1}$$

Эта формула позволяет найти период обращения спутника, если известна большая полуось его орбиты и гравитационный параметр K. Из формулы (1) видно, что при изменении эксцентриситета орбиты или ее малой полуоси b или фокального параметра p период спутника не изменится; только изменение большой полуоси влияет на период обращения спутника (при данном K). Формулу (1) можно переписать и так:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2}. \tag{2}$$

Так как за T единиц времени радиус-вектор спутника заметает угол в 2π радиан, то в среднем в течение одной единицы времени этот радиус-вектор заметет угол в $2\pi/T$ радиан. Число

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

называется *средней угловой скоростью* движения эллиптического спутника, или его *средним движением*. Из (1) видно, что

$$n = \frac{\sqrt{K}}{a^{3/2}}. \tag{4}$$

Мы здесь пока не делали никаких предположений относительно параметра K. Допустим теперь, что речь идет об «ограниченной» задаче двух тел, то есть о движении малого (непритягивающего) спутника. В таком случае $K = fM$, где M — масса притягивающего центра, и

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{fM}{4\pi^2}. \tag{5}$$

Если другой малый спутник обращается вокруг того же притягивающего центра и если a_1 и T_1 — соответственно большая полуось его орбиты и период его обращения, то и для него

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{fM}{4\pi^2},$$

так что

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_1^2}{a_1^3}. \tag{6}$$

Таким образом, мы вывели третий закон Кеплера:

Квадраты периодов обращения двух непритягивающих спутников одного и того же притягивающего центра пропорциональны кубам их средних расстояний от притягивающего центра.

2. Допустим, что центральное тело можно рассматривать как шар радиуса r_0 со сферическим распределением плотности. Период T_0 обращения нулевого спутника этого центрального тела равен $2\pi r_0^{3/2}/\sqrt{fM}$. Период обращения всякого другого (ненулевого) спутника определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{fM}} a^{3/2}, \tag{7}$$

где a — большая полуось орбиты этого спутника. Поэтому

$$T = T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2}. \tag{8}$$

Так как $a > r_0$, то $T > T_0$. Таким образом, период обращения любого спутника центрального тела больше периода обращения нулевого спутника. Например, период обращения нулевого спутника Земли равен 84,3 *мин*; следовательно, период обращения всякого другого спутника Земли заведомо больше чем 84,3 *мин*. Заметим попутно, что период обращения реального спутника Земли не может быть меньше 87,7 *мин* — при меньшем периоде спутник прекращает свое существование уже на первых витках.

П р и м е р. Для первого советского ИСЗ высота перигея была равна $H_\pi \approx 230$ *км*, высота апогея $H_\alpha \approx 950$ *км*. Каков был его период обращения?

Р е ш е н и е. Если r_0 — радиус Земли, то большая полуось a его орбиты равна $a = \frac{1}{2}(2r_0 + H_\alpha + H_\pi)$. По формуле (8)

$$T = T_0\left(1 + \frac{H_\alpha + H_\pi}{2r_0}\right)^{3/2}.$$

Производя разложение в биномиальный ряд и отбрасывая все члены, кроме первого и второго, получим

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{3}{4}\frac{H_\alpha + H_\pi}{r_0}\right) \approx 96{,}1 \text{ мин.}$$

Более точный подсчет показывает, что погрешность найденного значения T не превосходит 0,1 *мин.*

Если в какой-то «начальный» момент времени малый (непритягивающий) спутник находится на расстоянии r_0 от центрального тела и имеет скорость v_0, то большая полуось орбиты определяется из формулы

$$v_0^2 = K\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right).$$

Поэтому (см. (7)) период обращения спутника T зависит только от абсолютной величины скорости, но не от ее направления: если в какой-то точке пространства стартует малый спутник с некоторой эллиптической скоростью v_0, то при любом направлении вектора скорости спутник вернется в точку старта через одно и то же время (если только он по пути не столкнется с центральным телом).

3. Рассмотрим теперь общий случай задачи двух тел (случай притягивающего спутника). В этом случае

$$K = f\,(M + m), \tag{9}$$

где M — масса притягивающего центра, m — масса спутника. Из (2) и (9) следует, что

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{f\,(M + m)}{4\pi^2}. \tag{10}$$

Для периода T_1 другого спутника того же притягивающего центра, имеющего массу m_1, получим уравнение

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{f\,(M + m_1)}{4\pi^2}.$$

Отсюда

$$\frac{T^2}{T_1^2}\,\frac{1 + m/M}{1 + m_1/M} = \frac{a^3}{a_1^3}. \tag{11}$$

Эта формула выражает так называемый «уточненный третий закон Кеплера», найденный И. Ньютоном. Она находит, в частности, применение при «взвешивании» (точнее, при вычислении масс) планет и их естественных спутников. Из формулы (10) следует, между прочим, такой парадоксальный вывод: чем тяжелее спутник, движущийся вокруг центрального тела по данной орбите, тем быстрее обойдет он свою орбиту.

4. Во введении мы привели значение универсальной константы тяготения f в интернациональной системе единиц (основные единицы длины, массы, времени — так называемые лабораторные единицы: метр, килограмм, секунда). В этом значении f — только четыре верные значащие цифры.

При выборе траекторий полета к другим планетам и для решения многих других задач космонавтики такая точность совершенно недостаточна. Существует другая система основных единиц — так называемая астрономическая система единиц, в которой удается найти константу тяготения со значительно большей точностью — с девятью-десятью верными значащими цифрами. В этой системе за единицу длины принимается среднее расстояние от центра Земли до центра Солнца; за единицу массы — масса Солнца; за единицу времени — средние солнечные сутки. Для вычисления константы тяготения можно воспользоваться третьим законом Кеплера. Константу тяготения f в астрономической системе единиц обычно обозначают через k^2 (k — константа Гаусса). Для нахождения константы k Гаусс воспользовался известным ему значением периода обращения Земли вокруг Солнца $T_З$ = 1 год = 365,2563835 средних солнечных суток и известным в его время значением для отношения массы Земли к массе Солнца:

$$m_З/m_С = 0{,}000002819.$$

Применяя формулу (10) к системе Солнце — Земля, получим

$$k = \frac{2\pi}{T_З}\sqrt{\frac{a^3}{m_С + m_З}}. \tag{12}$$

Полагая в этой формуле $a = 1$, $m_С = 1$, $m_С + m_З = 1{,}000002819$, $T_З = 365{,}2563835$, Гаусс нашел $k = 0{,}01720209895$. . (здесь 9 верных значащих цифр). При получении более точных значений для $T_З$ и для отношения $m_З/m_С$ можно было бы по формуле (12) найти более точное значение для k.

Для проектирования межпланетных перелетов существенно знать с большой точностью гравитационный параметр Солнца $K_С$. Обозначим значение $K_С$ в астрономической системе единиц через $K_{С(\text{астр})}$, а в лабораторной системе единиц — через $K_{С(\text{лаб})}$. Очевидно, что

$$K_{С\,(\text{астр})} = k^2 \frac{(\text{а. е.})^3}{сут^2}.$$

Если a — число километров, содержащихся в одной астрономической единице, то

$$K_{С\,(\text{лаб})} = k^2 \frac{a^3}{(24 \cdot 3600)^3}\ км^3/сек^2. \qquad (13)$$

Следовательно, для нахождения с большой точностью гравитационного параметра Солнца в лабораторных единицах необходимо знать с большой точностью в километрах длину астрономической единицы.

Так как при запуске межпланетных кораблей начальные данные задаются в лабораторной системе единиц (например, скорость в момент отсечки двигателя), то исключительно важно знать с большой точностью астрономическую единицу в километрах. В течение последних лет были предприняты энергичные шаги для точного измерения астрономической единицы (в километрах). В 1961 году в СССР, США и Англии были для этой цели использованы результаты радиолокации Венеры.

Наблюдения и расчеты, выполненные группой советских ученых (В. А. Котельников и др. [2.1]), привели к следующему значению астрономической единицы:

$$a = (149\,599\,300 \pm 2000)\ км.$$

Такое значение a позволяет вычислить в лабораторных единицах гравитационный параметр Солнца с точностью до шести-семи верных значащих цифр. По данным Калифорнийского технологического института

$$a = (14\,959\,8500 \pm 500)\ км.$$

Задачи

1. Мы видели, что период обращения всякого малого («непритягивающего») спутника звезды больше периода обращения ее нулевого спутника. Верно ли это утверждение и для всякого притягивающего спутника звезды?

2. Согласно сообщению ТАСС, опубликованному 16 мая 1958 года, период обращения третьего советского ИСЗ 15 мая 1958 года составлял 106 *мин*, а наибольшая его высота над поверхностью Земли 1880 *км*. В сводке ТАСС ничего не говорится о наименьшей высоте спутника. Вычислите эту наименьшую высоту.

3. Орбита корабля-спутника «Восток-II», на котором советский космонавт Г. С. Титов 6—7 августа 1961 года совершил многократный облет вокруг Земли, имел на первых витках такие параметры: наибольшая высота $H_\alpha = 244$ *км*, наименьшая высота $H_\pi = 183$ *км*. Найдите период обращения спутника.

4. Космический корабль совершает полет к перигею Луны. Перигей орбиты космолета находится на высоте 230 *км*. Известно, что перигейная скорость космолета v_π является минимальной для совершения этого полета. Сколько времени займет полет до перигея Луны? Решите аналогичную задачу для перелета к апогею Луны. Расстояния от центра Земли до перигея и апогея Луны равны соответственно 363 300 и 404 000 *км*.

5. Советский спутник «Электрон-2», запущенный в январе 1964 года для исследования радиационных поясов Земли, имел в день запуска перигейную высоту $H_\pi = 460$ *км*. Период обращения спутника составлял 22 *час* 40 *мин*. Найдите апогейную высоту спутника H_α и его апогейную скорость v_α.

6. Будем для простоты считать, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите, причем расстояние между центрами Земли и Луны равно 384 400 *км*. В момент, когда Луна находится в точке L_0 своей орбиты, в диаметрально противоположной точке S_0 этой орбиты космическая ракета получает (в плоскости лунной орбиты) местную круговую скорость относительно Земли и начинает обращаться вокруг Земли в том же направлении, что и Луна. Упадет ли эта ракета когда-либо на Луну? Притяжением Луны и Солнца при решении этой задачи пренебречь.

7. Первая советская космическая ракета, запущенная в сторону Луны 2 января 1959 года, через несколько дней после запуска стала спутником Солнца (искусственной планетой). Перигелий ее орбиты отстоит от Солнца на расстоянии $146{,}4\cdot 10^6$ *км*, афелий — на расстоянии $197{,}2\cdot 10^6$ *км*. Найдите период обращения этой искусственной планеты вокруг Солнца.

8. Американская космическая ракета «Пионер-V», запущенная в сторону Луны 11 марта 1960 года и ставшая спутником Солнца, имеет период обращения вокруг Солнца 312 суток. Расстояние перигелия ракеты от Солнца равно 120 млн. *км*. Вычислите расстояние афелия ракеты от Солнца.

9. Минимальное удаление советского спутника «Космос-II», запущенного 6 апреля 1962 года, от поверхности Земли составляло в этот

день 213 *км*, а максимальное — 1560 *км*. Подсчитайте, каким был 6 апреля период обращения спутника вокруг Земли.

10. Космолет движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля, и притом настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Космолет получил в направлении своего движения дополнительный импульс скорости, достаточный для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Сколько суток займет этот перелет? Какую скорость относительно Солнца должен был иметь корабль в момент старта с орбиты Земли? Орбиты Земли и Марса относительно Солнца считать окружностями с радиусами $R_З = 150 \cdot 10^6$ *км* и $R_М = 228 \cdot 10^6$ *км*.

11. Решите аналогичную задачу, если перелет должен совершаться с орбиты Земли к орбите Венеры (расстояние Венеры от Солнца $R_В = 108 \cdot 10^6$ *км*).

§ 11. СОЛНЕЧНЫЙ ПАРУС

Полученные в этой главе результаты можно иногда применять при решении задач, в которых участвуют не только гравитационные силы. В качестве примера рассмотрим задачу о солнечном парусе.

В некоторых работах по космонавтике предлагается использовать открытый П. Н. Лебедевым эффект светового давления для приведения в движение космического корабля. Для этой цели можно снабдить корабль парусом достаточно большой площади и использовать для движения спутника давление солнечных лучей на парус.

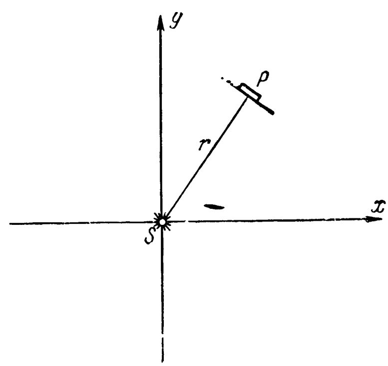

Рис. 2.16.

Рассмотрим частный случай, когда парус плоский и ориентируется в пространстве так, чтобы он был все время перпендикулярен к лучам, идущим от Солнца (рис. 2.16). Будем полагать, что ракетный двигатель космического корабля выключен. Найдем траекторию, по которой будет в этом случае двигаться корабль *).

*) Эту задачу впервые (в 1924 году) решил советский ученый Ф. А. Цандер.