день 213 *км*, а максимальное — 1560 *км*. Подсчитайте, каким был 6 апреля период обращения спутника вокруг Земли.

10. Космолет движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля, и притом настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Космолет получил в направлении своего движения дополнительный импульс скорости, достаточный для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Сколько суток займет этот перелет? Какую скорость относительно Солнца должен был иметь корабль в момент старта с орбиты Земли? Орбиты Земли и Марса относительно Солнца считать окружностями с радиусами $R_З = 150 \cdot 10^6$ *км* и $R_М = 228 \cdot 10^6$ *км*.

11. Решите аналогичную задачу, если перелет должен совершаться с орбиты Земли к орбите Венеры (расстояние Венеры от Солнца $R_В = 108 \cdot 10^6$ *км*).

§ 11. СОЛНЕЧНЫЙ ПАРУС

Полученные в этой главе результаты можно иногда применять при решении задач, в которых участвуют не только гравитационные силы. В качестве примера рассмотрим задачу о солнечном парусе.

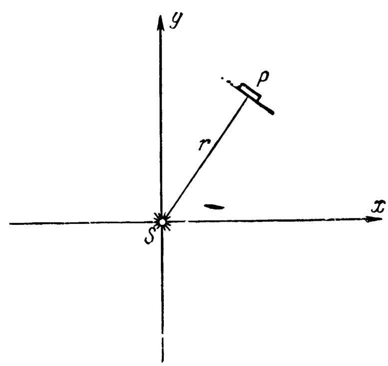

Рис. 2.16.

В некоторых работах по космонавтике предлагается использовать открытый П. Н. Лебедевым эффект светового давления для приведения в движение космического корабля. Для этой цели можно снабдить корабль парусом достаточно большой площади и использовать для движения спутника давление солнечных лучей на парус.

Рассмотрим частный случай, когда парус плоский и ориентируется в пространстве так, чтобы он был все время перпендикулярен к лучам, идущим от Солнца (рис. 2.16). Будем полагать, что ракетный двигатель космического корабля выключен. Найдем траекторию, по которой будет в этом случае двигаться корабль *).

*) Эту задачу впервые (в 1924 году) решил советский ученый Ф. А. Цандер.

Введем следующие обозначения: s — площадь паруса, r — расстояние паруса от (центра) Солнца, r_0 — среднее расстояние от Земли до Солнца. Сила, с которой солнечные лучи отталкивают парус, может быть вычислена по формуле

$$F_1 = \alpha \frac{r_0^2}{r^2} s, \tag{1}$$

где α — коэффициент пропорциональности, который может быть найден экспериментально. Этот коэффициент называют константой светового давления. Число α показывает, с какой силой давят солнечные лучи на перпендикулярную к ним площадку, имеющую площадь 1 $м^2$ и расположенную вблизи Земли. Можно принять, что для абсолютно черного паруса $\alpha = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ $н/м^2$. Произведение αs — это суммарная сила, с которой солнечный свет давит на парус, когда последний находится вблизи Земли.

Обозначим через m массу космического корабля (вместе с парусом), через M — массу Солнца. Рассмотрим случай, когда влиянием других небесных тел, кроме Солнца, на корабль можно пренебречь (корабль находится далеко от них).

Выберем систему отсчета с началом в центре Солнца и с осями, постоянно ориентированными в пространстве. Дифференциальное уравнение движения корабля относительно Солнца, очевидно, таково:

$$m \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(-f \frac{Mm}{r^2} + \alpha s \frac{r_0^2}{r^2} \right) \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2}$$

(здесь $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор корабля $\overrightarrow{SP}$). Последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -K \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{3}$$

где

$$K = fM - \alpha r_0^2 \frac{s}{m}. \tag{4}$$

Таким образом, мы пришли к знакомому нам уравнению (8) из § 1, только константа K имеет сейчас иной физический смысл. Все полученные выше следствия из уравнения (2.1.8) остаются в силе и сейчас. В частности, *корабль с солнечным парусом, постоянно ориентированным перпендикулярно к солнечным лучам, будет двигаться по коническому сечению* (по эллипсу, параболе или гиперболе) *).

Предположим для простоты, что космический корабль до момента развертывания паруса двигался вокруг Солнца по круговой орбите (например, находился на орбите Земли). Его скорость v_0 определяется по формуле

$$v_0^2 = \frac{fM}{r_0}.$$

Пусть в какой-то момент t_0 корабль развернул солнечный парус площади s. Тогда он начал двигаться по коническому сечению, у которого главная полуось a определится из формулы

$$v_0^2 = K\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right),$$

то есть

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{fM - \alpha r_0^2 s/m}. \tag{5}$$

Обозначим через s_1 то значение величины s, для которого правая часть формулы (5) обращается в нуль. При $0 \leqslant s < s_1$ $\frac{1}{a} > 0$, т. е. $a > 0$, а это значит, что корабль движется вокруг Солнца по некоторому эллипсу. Этот эллипс будет тем более вытянутым, чем больше площадь паруса. Но с течением времени этот эллипс не будет деформироваться, не будет растягиваться (несмотря на постоянное, непрерывное давление солнечных лучей на парус!), и корабль через определенные (одинаковые) промежутки времени будет приходить к той точке своей первоначальной круговой орбиты, где был развернут парус. Если $s = s_1$ или $s > s_1$, то корабль будет неограниченно удаляться от Солнца (соответственно по параболе или гиперболе). Пусть s выбрано настолько большим, чтобы $K = 0$, то

*) При этом следует считать величину K положительной, то есть площадь паруса s не очень большой.

есть $s = s_2 = \dfrac{fMm}{\alpha r_0^2}$. Тогда солнечное давление на парус компенсирует силу тяготения корабля к Солнцу, и корабль будет двигаться равномерно и прямолинейно. Если же площадь паруса будет больше, чем s_2, то сила, с которой солнечное излучение отталкивает парус, будет больше силы, с которой солнечная масса притягивает корабль. Корабль будет неограниченно удаляться от Солнца по некоторой траектории, обращенной своей выпуклостью к Солнцу (можно показать, что это будет гипербола).

Задачи

1. Космолет с массой в 1000 *кг* движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля (эту орбиту будем считать окружностью), и притом настолько далеко от Земли, что ее притяжением можно пренебречь. С помощью плоского солнечного паруса он должен совершить перелет к орбите Марса по траектории, касающейся орбит Земли и Марса (орбиту Марса считаем окружностью, притом лежащей в одной плоскости с орбитой Земли). Материал, из которого изготовлен парус, таков, что кусок паруса площадью в 1 $м^2$ имеет массу 2 *г*. Во время полета предполагается постоянно ориентировать парус перпендикулярно к солнечным лучам. Давление солнечного света на такой парус, если бы он находился вблизи Земли, составляло бы примерно $4{,}5\cdot 10^{-6}$ $н/м^2$. Какую площадь должен иметь парус? Какова его масса?

2. Космический аппарат движется вокруг Солнца под действием светового давления и силы притяжения Солнца. Его солнечный парус имеет такую большую площадь, что постоянная K в дифференциальном уравнении движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -K\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

отрицательна. Найдите уравнение орбиты аппарата и выясните характер его движения.

§ 12. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ *)

1. Для вывода законов Кеплера, уравнения орбиты спутника и некоторых других формул задачи двух тел можно воспользоваться аппаратом комплексных переменных. Пусть материальная точка (P, m) (непритягивающий спутник) движется под влиянием тяготения к притягивающему центру

*) Этот параграф можно при первом чтении опустить.