есть $s = s_2 = \frac{fMm}{\alpha r_0^2}$. Тогда солнечное давление на парус компенсирует силу тяготения корабля к Солнцу, и корабль будет двигаться равномерно и прямолинейно. Если же площадь паруса будет больше, чем s_2, то сила, с которой солнечное излучение отталкивает парус, будет больше силы, с которой солнечная масса притягивает корабль. Корабль будет неограниченно удаляться от Солнца по некоторой траектории, обращенной своей выпуклостью к Солнцу (можно показать, что это будет гипербола).

Задачи

1. Космолет с массой в 1000 *кг* движется вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля (эту орбиту будем считать окружностью), и притом настолько далеко от Земли, что ее притяжением можно пренебречь. С помощью плоского солнечного паруса он должен совершить перелет к орбите Марса по траектории, касающейся орбит Земли и Марса (орбиту Марса считаем окружностью, притом лежащей в одной плоскости с орбитой Земли). Материал, из которого изготовлен парус, таков, что кусок паруса площадью в 1 $м^2$ имеет массу 2 *г*. Во время полета предполагается постоянно ориентировать парус перпендикулярно к солнечным лучам. Давление солнечного света на такой парус, если бы он находился вблизи Земли, составляло бы примерно $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ $н/м^2$. Какую площадь должен иметь парус? Какова его масса?

2. Космический аппарат движется вокруг Солнца под действием светового давления и силы притяжения Солнца. Его солнечный парус имеет такую большую площадь, что постоянная K в дифференциальном уравнении движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -K\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

отрицательна. Найдите уравнение орбиты аппарата и выясните характер его движения.

§ 12. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ *)

1. Для вывода законов Кеплера, уравнения орбиты спутника и некоторых других формул задачи двух тел можно воспользоваться аппаратом комплексных переменных. Пусть материальная точка (P, m) (непритягивающий спутник) движется под влиянием тяготения к притягивающему центру

*) Этот параграф можно при первом чтении опустить.

(A, M). Выберем в плоскости движения прямоугольную систему координат Axy (рис. 2.17). Дифференциальные уравнения движения спутника имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -K\frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -K\frac{y}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

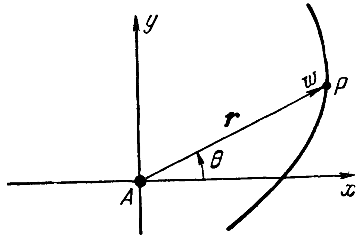

Рис. 2.17.

Введем для спутника P вместо двух вещественных координат x, y одну комплексную координату $w = x + iy$. Тогда два уравнения (1) объединяются в одно:

$$\ddot{w} = -K\frac{w}{r^3}, \tag{2}$$

где $r = |w| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Интеграл площадей. Умножая (2) на $\bar{w}$ ($\bar{w} = x - iy$), получим

$$\bar{w}\ddot{w} = -\frac{K}{r^3}\bar{w}w,$$

или

$$\bar{w}\ddot{w} = -\frac{K}{r}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $\dot{w}\dot{\bar{w}}$:

$$\bar{w}\ddot{w} + \dot{w}\dot{\bar{w}} = -\frac{K}{r} + \dot{w}\dot{\bar{w}},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\bar{w}\dot{w}) = -\frac{K}{r} + |\dot{w}|^2.$$

Но правая часть — всегда вещественное число. Поэтому мнимая часть

$$\operatorname{Im}\frac{d}{dt}(\bar{w}\dot{w}) = 0,$$

то есть *)

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Im}(\bar{w}\dot{w}) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{Im}(\bar{w}\dot{w}) = \sigma, \tag{3}$$

где σ — некоторая вещественная константа. Зависимость (3) между комплексной координатой спутника w и его скоростью $\dot{w}$ называют *интегралом площадей* (*в комплексной форме*). Вещественное число σ называют *константой площадей*. Так как $w = x + iy$, $\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y}$, $\bar{w} = x - iy$, то (3) можно записать так:

$$\operatorname{Im}[(x - iy)(\dot{x} + i\dot{y})] = \sigma.$$

Отсюда получаем *декартову форму интеграла площадей*

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \tag{4}$$

Запишем w в показательной форме **):

$$w = re^{i\theta}.$$

Отсюда

$$\bar{w} = re^{-i\theta}$$

и

$$\dot{w} = (\dot{r} + ir\dot{\theta})\,e^{i\theta}. \tag{5}$$

Поэтому

$$\operatorname{Im}(\bar{w}\dot{w}) = \operatorname{Im}[r(\dot{r} + ir\dot{\theta})] = r^2\dot{\theta},$$

и из (3) получаем полярную форму интеграла площадей

$$r^2\dot{\theta} = \sigma. \tag{6}$$

*) Легко проверить, что операция дифференцирования по вещественному переменному (t) перестановочна с операцией взятия мнимой (или вещественной) части и с операцией перехода к сопряженным переменным.

**) Воспользовавшись формулой Эйлера (см. § 8), любое комплексное число w, представленное в тригонометрической форме:

$$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

можно записать в так называемой показательной форме:

$$w = \rho e^{i\varphi}.$$

Движение спутника прямое (по определению), если $\sigma > 0$, и обратное, если $\sigma < 0$. При $\sigma = 0$ имеем $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \mathrm{const}$, а это значит, что спутник движется по лучу, исходящему из притягивающего центра. Для определенности всюду в дальнейшем ограничимся случаем $\sigma > 0$. Тогда $\dot{\theta} > 0$, θ монотонно возрастает, радиус-вектор спутника вращается вокруг притягивающего центра против часовой стрелки. Формулу (5) запишем так:

$$\dot{w} = \dot{r}e^{i\theta} + r\dot{\theta}\,(ie^{i\theta}). \tag{7}$$

Число $e^{i\theta}$ изображает орт радиуса-вектора спутника; вектор $ie^{i\theta} \equiv e^{i(\theta+\pi/2)}$ — тоже единичный, он получается из вектора $e^{i\theta}$ поворотом на $+90°$. В каждый данный момент времени вектор $e^{i\theta}$ определяет некоторую ось, проходящую через спутник, а именно ту ось, на которой лежит этот вектор и которая одинаково направлена с ним. Мы ее назовем *радиальной* осью. С течением времени радиальная ось поворачивается вокруг начала координат. Вектор $ie^{i\theta}$ тоже определяет в каждый момент времени некоторую ось, проходящую через спутник,— ту, на которой лежит этот вектор и которая одинаково направлена с ним. Эту ось назовем *трансверсальной* осью. Величину v_r проекции вектора скорости спутника $\dot{w}$ на радиальную ось называют в механике радиальной компонентой скорости, а величину v_n проекции вектора $\dot{w}$ на трансверсальную ось — трансверсальной (или поперечной) компонентой скорости. Из формулы (7) видно, что

$$v_r = \dot{r},\ v_n = r\dot{\theta}. \tag{8}$$

Поэтому интеграл площадей приобретает вид

$$rv_n = \sigma, \tag{9}$$

или

$$r\,v\sin\varphi = \sigma, \tag{10}$$

где φ — угол между векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\dot{w}$.

3. Интеграл энергии. Из дифференциального уравнения (2)

$$\ddot{w} = -K\frac{w}{r^3}$$

(здесь $r = |w|$) следует, что

$$\dot{\bar{w}}\ddot{w} = -K\frac{w\dot{\bar{w}}}{r^3}.$$

Это равенство остается в силе, если в нем все величины заменить им сопряженными, так что $\dot{w}\ddot{\bar{w}} = -K\frac{\bar{w}\dot{w}}{r^3}$. Следовательно,

$$\dot{\bar{w}}\ddot{w} + \dot{w}\ddot{\bar{w}} = -\frac{K}{r^3}(w\dot{\bar{w}} + \dot{w}\bar{w}),$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{\bar{w}}\dot{w}) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(w\cdot\bar{w}).$$

Но

$$w\bar{w} = |w|^2 = r^2,\ \dot{w}\dot{\bar{w}} = |\dot{w}|^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(r^2) = -\frac{2K}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2K}{r}\right).$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{2K}{r} + h, \tag{11}$$

где h — вещественная константа (константа энергии).

4. Интеграл Лапласа. Из полученных ранее формул

$$\ddot{w} = -Kw/r^3 \text{ и } \sigma = r^2\dot{\theta}$$

следует, что

$$-i\sigma\ddot{w} = i\frac{Kw}{r^3}(r^2\dot{\theta}) = Ke^{i\theta}\dot{\theta},$$

или

$$\frac{d}{dt}(-i\sigma\dot{w}) = \frac{d}{dt}(Ke^{i\theta}),$$

откуда

$$-i\sigma\dot{w} - Ke^{i\theta} = \Lambda, \tag{12}$$

где Λ — некоторая комплексная константа (константа Лапласа); соответствующий ей вектор называют вектором

Лапласа. Формула (12) называется «интегралом Лапласа в комплексной форме».

5. Уравнение орбиты спутника. Вектор Лапласа можно записать в показательной форме:

$$\Lambda = \lambda e^{i\theta_0},$$

где $\lambda = |\Lambda| \geqslant 0$, а θ_0 — угол наклона вектора Λ к вещественной оси.

Интеграл Лапласа остается справедливым при *любом* выборе направления вещественной оси. Выберем это направление таким образом, чтобы оно совпало с направлением вектора Лапласа Λ. Тогда $\theta_0 = 0$, и интеграл Лапласа принимает вид

$$-i\sigma\dot{w} - Ke^{i\theta} = \lambda. \tag{13}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\dot{w} = \left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)e^{i\theta}.$$

Подставив это значение для $\dot{w}$ в (13), найдем:

$$-i\sigma\left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)e^{i\theta} - Ke^{i\theta} = \lambda,$$

или

$$-i\sigma\dot{r} + \frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda e^{-i\theta}. \tag{14}$$

Приравнивая вещественные части обеих частей равенства (14), получим:

$$\frac{\sigma^2}{r} - K = \lambda\cos\theta, \tag{15}$$

откуда при $\sigma \neq 0$

$$r = \frac{\sigma^2/K}{1 + \frac{\lambda}{K}\cos\theta}. \tag{16}$$

Используя обозначения

$$p = \sigma^2/K,\ \varepsilon = \lambda/K, \tag{17}$$

приведем уравнение (16) к виду

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}. \tag{18}$$

А это и есть уравнение эллипса, гиперболы или параболы (в полярных координатах).

6. Связь между константами K, λ, σ, h. Докажем формулу

$$\lambda = \sqrt{K^2 + h\sigma^2}. \tag{19}$$

Обозначим через $\operatorname{Re} u$ действительную часть комплексного числа u. Воспользуемся таким легко проверяемым тождеством, справедливым для любых комплексных чисел:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2). \tag{20}$$

Из (13) следует, что

$$\lambda^2 = |i\sigma\dot{w} + Ke^{i\theta}|^2 = \sigma^2 v^2 + K^2 + 2\operatorname{Re}(i\sigma\dot{w}Ke^{-i\theta}) =$$
$$= \sigma^2 v^2 + K^2 + 2\operatorname{Re}\left[i\sigma K\left(\dot{r} + i\frac{\sigma}{r}\right)\right] =$$
$$= K^2 + \sigma^2 v^2 - 2\frac{\sigma^2 K}{r}.$$

Но $v^2 - 2K/r = h$. Поэтому $\lambda^2 = K^2 + \sigma^2 h$. Из (17) и (19) следует, что

$$\varepsilon = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}}. \tag{21}$$

7. Скорость спутника и ее компоненты. Из интеграла Лапласа (13) получаем (при $\sigma \neq 0$) формулу для вектора скорости

$$\dot{w} = \frac{i}{\sigma}(\lambda + Ke^{i\theta}). \tag{22}$$

Так как $\lambda = K\varepsilon$, то

$$\dot{w} = i\frac{K}{\sigma}(\varepsilon + e^{i\theta}), \tag{23}$$

$$v^2 = |\dot{w}|^2 = \left(\frac{K}{\sigma}\right)^2 |\varepsilon + e^{i\theta}|^2.$$

Используя тождество (20), получим

$$v^2 = \left(\frac{K}{\sigma}\right)^2 (1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\theta). \qquad (24)$$

Так как $\sigma^2 = Kp$, то $(K/\sigma)^2 = K/p$. При $\sigma > 0$ $K/\sigma = +\sqrt{K/p}$. Из (23) и (24) следует, что

$$\dot{w} = i\sqrt{\frac{K}{p}}(\varepsilon + e^{i\theta}), \qquad (25)$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{p}}\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\cos\theta}. \qquad (26)$$

Из (7) и (8) видно, что скорость спутника $\dot{w}$ может быть выражена через ее радиальную и трансверсальную компоненты v_r и v_n по формуле

$$\dot{w} = v_r e^{i\theta} + v_n i e^{i\theta}. \qquad (27)$$

Сравнивая две формулы для скорости спутника (25) и (27), получим:

$$(v_r + iv_n)\, e^{i\theta} = i\sqrt{\frac{K}{p}}(\varepsilon + e^{i\theta}),$$

$$v_r + iv_n = i\sqrt{\frac{K}{p}}(\varepsilon e^{-i\theta} + 1) = i\sqrt{\frac{K}{p}}[1 + \varepsilon\cos\theta - i\varepsilon\sin\theta].$$

Отсюда

$$v_r = \sqrt{\frac{K}{p}}\varepsilon\sin\theta, \quad v_n = \sqrt{\frac{K}{p}}(1 + \varepsilon\cos\theta). \qquad (28)$$

8. Годограф скорости. Формулу (25) можно переписать так:

$$\dot{w} = i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{p}} + \sqrt{\frac{K}{p}}\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}. \qquad (29)$$

Отсюда видно, что точка $\dot{w}$ всегда лежит на окружности γ (рис.2.18) с центром $i\varepsilon\sqrt{K/p}$ и радиусом $\sqrt{K/p}$.

Действительно,

$$\left|\dot{w} - i\varepsilon\sqrt{\frac{K}{p}}\right| = \sqrt{\frac{K}{p}}. \tag{30}$$

Найдем скорость $\dot{w}$ спутника в тот момент, когда его истинная аномалия равна θ. Формула (29) показывает, каким образом получить вектор скорости $\dot{w}$. Для этого следует (рис. 2.18) провести через центр $i\varepsilon\sqrt{K/p}$ окружности γ

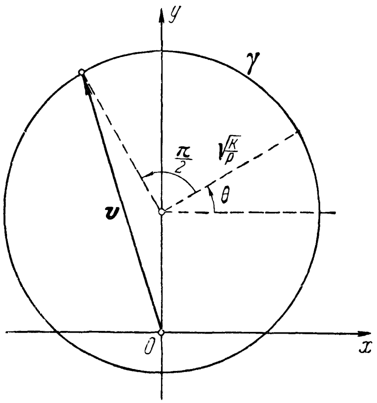

Рис. 2.18.

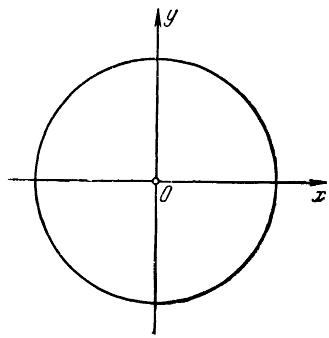

Рис. 2.19.

радиус, образующий угол $\theta + \pi/2$ с вещественной осью Ox. Вектор, идущий из начала координат O в конец этого радиуса, и есть искомый вектор скорости. На рис. 2.18—2.21 изображены годографы скорости $\dot{w}$ для тех случаев, когда орбита — эллипс (рис. 2.18), окружность (рис. 2.19), парабола (рис. 2.20), гипербола (рис. 2.21).

9. Солнечный парус. Пусть космический корабль P массы m движется под действием двух сил: притягивающей силы массы M Солнца и отталкивающей силы солнечных лучей, давящих на парус корабля. Будем полагать, что парус плоский, его площадь равна s и нормаль к плоскости паруса в течение всего движения лежит в одной и той же плоскости, проходящей через векторы $\overrightarrow{AP}$ (A — Солнце, P — корабль) и вектор скорости корабля $\boldsymbol{v}$.

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат (рис. 2.17) и составим дифференциальное уравнение движения космолета. Сила притяжения космолета к Солнцу равна

$$\boldsymbol{F}_1 = -f\frac{Mm}{r^2}e^{i\theta}, \tag{31}$$

где θ — угол между вещественной осью Ox и радиусом-вектором космолета $\overrightarrow{AP}$. Через φ обозначим угол между

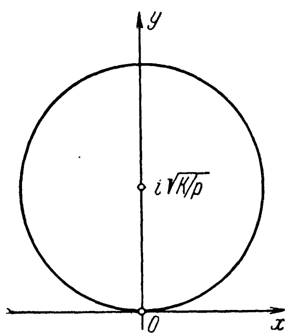

Рис. 2.20.

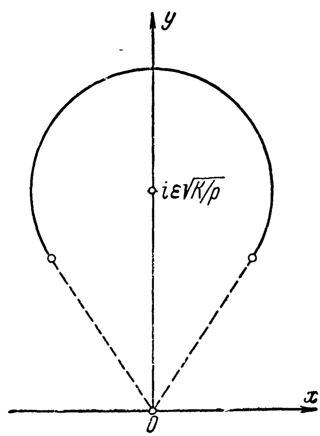

Рис. 2.21.

радиусом-вектором космолета $\overrightarrow{AP}$ и нормалью к плоскости паруса, а через α — постоянную солнечного давления (силу, с которой солнечные лучи давят на площадку в 1 $м^2$, когда последняя находится вблизи Земли). Тогда сила, с которой солнечные лучи давят на космолет, равна по величине

$$\frac{\alpha r_0^2 s}{r^2}\cos^2\varphi$$

и направлена под углом φ к радиусу-вектору $\overrightarrow{AP}$, то есть под углом $\theta+\varphi$ к вещественной оси, так что сила, с которой солнечные лучи отталкивают космолет, равна

$$F_2 = \frac{\alpha r_0^2 s}{r^2} \cos^2 \varphi e^{i(\theta+\varphi)}. \tag{32}$$

По второму закону Ньютона

$$m\ddot{w} = F_1 + F_2 = -f \frac{Mm}{r^2} e^{i\theta} + \frac{\alpha r_0^2 s}{r^2} e^{i(\theta+\varphi)} \cos^2 \varphi,$$

откуда

$$\ddot{w} = -\left[fM - \frac{\alpha r_0^2 s}{m} \cos^2 \varphi\, e^{i\varphi}\right] \frac{e^{i\theta}}{r^2}. \tag{33}$$

Введем обозначение

$$K = fM - \frac{\alpha r_0^2 s}{m} \cos^2 \varphi\, e^{i\varphi}. \tag{34}$$

Так как $w = re^{i\theta}$, то уравнение (33) принимает вид

$$\ddot{w} = -K \frac{w}{r^3}. \tag{35}$$

Это и есть дифференциальное уравнение плоского движения космолета с солнечным парусом. Здесь K — комплексная функция от времени. Внешне это уравнение не отличается от уравнения движения спутника в задаче двух тел. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ K — вещественная константа, и уравнение (35) интегрируется так же, как уравнение задачи двух тел (2). Если $\varphi \equiv \text{const} \neq \pi/2$ и $\varphi \neq 0$ (парус сохраняет ориентацию относительно радиуса-вектора космолета), то K — константа, и притом мнимая.

К сожалению, при интегрировании дифференциального уравнения задачи двух тел мы существенно опираемся на то, что параметр K — вещественное число. Поэтому ни интеграл площадей, ни интеграл энергии, ни интеграл Лапласа не остаются в силе для уравнения (35) при мнимом K. Однако и при мнимом K можно с помощью уравнений (34), (35) найти частные классы возможных траекторий космического аппарата с солнечным парусом.

Задачи

1. Логарифмическая спираль характеризуется в полярных координатах уравнением вида

$$r = r_0 e^{c\theta}.$$

Здесь θ — полярный угол, r — длина радиуса-вектора, c — тангенс угла между радиусом-вектором точки спирали и касательной к спирали. Покажите, что корабль с солнечным парусом, сохраняющим ориентацию относительно радиуса-вектора корабля, может двигаться по логарифмической спирали.

2. Космолет с массой 1000 *кг* прикреплен к плоскому солнечному парусу с массой 300 *кг*. Константа α солнечного давления для этого паруса составляет $9 \cdot 10^{-6}$ *н/м*^{2}, плотность парусного материала — 2 *г/м*^{2}. Парус постоянно ориентирован в пространстве так, что его нормаль образует угол $\varphi = 10^\circ$ с радиусом-вектором «Солнце — космолет». Космолет должен совершить перелет с орбиты Земли к орбите Марса. В качестве траектории полета выбрана логарифмическая спираль. Определите величину и направление начальной скорости космолета при отлете с орбиты Земли? Сколько времени займет перелет? Тяготением к Земле и Марсу пренебречь.

3. Каким образом можно было бы выбрать угол φ ориентации паруса, о котором говорится в предыдущей задаче, для того чтобы перелет был совершен по логарифмической спирали за кратчайшее время?

4. Решите задачу 2 в предположении, что перелет должен быть совершен к орбите Венеры.