# ГЛАВА III

# ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТА СПУТНИКА МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ ОРБИТЫ

## § 1. ПОЛЕТ ОТ ПЕРИЦЕНТРА

1. В предыдущей главе было показано, что движение спутника вокруг своего притягивающего центра $A$ происходит все время в некоторой плоскости, проходящей через точку $A$.

В этой плоскости мы выбрали полярную систему координат с началом в притягивающем центре $A$ и с полярной осью $A\Pi$, направленной в перицентр орбиты $\Pi$ (рис. 2.8).

В каждый момент времени положение спутника характеризуется двумя его полярными координатами: истинной аномалией $\theta$ и длиной $r$ радиуса-вектора $\overrightarrow{AP}$. Мы уже видели, что уравнение орбиты спутника имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \tag{1}$$

где $p$ — фокальный параметр орбиты, а $\varepsilon$ — ее эксцентриситет. Будем в дальнейшем считать известными параметры $p$, $\varepsilon$ орбиты спутника и гравитационный параметр $K$ притягивающего центра. Таким образом, мы можем считать известной орбиту спутника. Чтобы определить положение $P$ спутника на орбите, достаточно найти истинную аномалию $\theta$ этой точки; расстояние $AP = r$ уже легко вычислить по формуле (1).

Обозначим через $t_0$ момент прохождения спутника через перицентр орбиты $\Pi$, а через $t$ — момент его прохождения через точку $P$. Продолжительность перелета спутника от перицентра $\Pi$ до точки $P$ обозначим через $\tau$:

$$\tau = t - t_0. \tag{2}$$

Нас будут интересовать две задачи.

Задача 1. Сколько времени потребуется спутнику для перелета по известной орбите от перицентра $\Pi$ до заданной точки $P$ орбиты?

Таким образом, даны величины $K$, $\varepsilon$, $p$, $\theta$ (истинная аномалия точки $P$); требуется найти $\tau$.

Задача 2. В какой точке $P$ своей орбиты окажется спутник через $\tau$ единиц времени после прохождения через свой перицентр?

Таким образом, даны величины $K$, $\varepsilon$, $p$, $\tau$. Ищется $\theta$.

**2.** Искомую зависимость между величинами $\tau$ и $\theta$ (при данных $K$, $\varepsilon$, $p$) можно найти из уравнения орбиты спутника (1) и из интеграла площадей:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sigma.$$

Отсюда

$$dt = \frac{r^2}{\sigma} d\theta.$$

Интегрируя это равенство по $\theta$ в пределах от $0$ до $\theta$, получим:

$$\tau = t - t_0 = \int_0^\theta \frac{r^2}{\sigma} d\theta = \frac{p^2}{\sigma} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}. \tag{3}$$

Интеграл в правой части — некоторая функция от $\theta$. Она может быть выражена через $\theta$ посредством элементарных функций. Однако окончательный вид этого интеграла будет разным в трех случаях: $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon > 1$. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 1$ (полет по *параболической* орбите):

$$\tau = \frac{p^2}{\sigma} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{K}} \int_0^\theta \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) d \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$\tau = \sqrt{\frac{p^3}{K}} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}\right). \tag{4}$$

Зная истинную аномалию $\theta$ какой-либо точки $P$ параболической орбиты, можно по этой формуле вычислить, сколько времени ($\tau$) потребуется спутнику для полета от перицентра до этой точки. Заметим, что и, наоборот, для каждого момента $t$ можно с помощью уравнения (4) найти соответствующее значение истинной аномалии $\theta$ точки $P$, в которой будет находиться в этот момент спутник, если он находился в перицентре в момент $t_0$. Для этой цели, как видно из формулы (4), следует сначала решить кубическое уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

Пользуясь уравнением параболической орбиты, можно время перелета по дуге $ПP$ выразить также через расстояния спутника от притягивающего центра в начале и конце перелета. Действительно, в случае параболы

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{p}{2}\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{p}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2r}{p}-1}, \quad 1+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2r}{p}+2\right).$$

Поэтому

$$\tau = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{p^3}{K}}\left(\frac{2r}{p}+2\right)\sqrt{\frac{2r}{p}-1},$$

то есть

$$\tau = \frac{1}{3}(r+p)\sqrt{(2r-p)/K}. \tag{5}$$

При помощи этой формулы можно определить, сколько времени занимает перелет спутника по параболической орбите от перицентра до точки, отстоящей на расстоянии $r$ от притягивающего центра.

**3.** В случае *эллиптической орбиты малого эксцентриситета* можно из формулы (3) получить достаточно удобную для практических целей зависимость между продолжительностью перелета (от перицентра до какой-либо точки $P$ орбиты) и полярными координатами этой точки.

Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + \ldots \quad (|q| < 1).$$

Продифференцировав его почленно, найдем

$$\frac{1}{(1+q)^2} = 1 - 2q + 3q^2 - \ldots,$$

или

$$\frac{1}{(1+q)^2} = 1 - 2q + q^2\, O(q),$$

где $O(q)$ — некоторая функция от $q$, которая остается ограниченной по абсолютной величине при $q \to 0$. Полагая $q = \varepsilon \cos\theta$, получим:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} = 1 - 2\varepsilon\cos\theta + \varepsilon^2 O(\varepsilon).$$

Поэтому из (3) следует

$$\tau = \frac{p^2}{\sigma}(\theta - 2\varepsilon\sin\theta) + \varepsilon^2 O(\varepsilon).$$

Пренебрегая членами, содержащими $\varepsilon^2$, получим:

$$\tau \approx \frac{p^2}{\sigma}(\theta - 2\varepsilon\sin\theta). \tag{6}$$

Положим в этом равенстве $\theta = 2\pi$; тогда $\tau = T$, где $T$ — период обращения спутника вокруг притягивающего центра. В этом случае формула (6) дает:

$$T \approx \frac{p^2}{\sigma}\, 2\pi. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что при любом $\theta$

$$\tau \approx \frac{T}{2\pi}(\theta - 2\varepsilon\sin\theta). \tag{8}$$

Точным вычислением интеграла (3) при $\varepsilon \neq 1$ мы займемся в следующем параграфе.

**Задачи**

1. Ракета получила на высоте 230 *км* над поверхностью Земли параболическую скорость в горизонтальном направлении. Через некоторое время она достигла орбиты Луны (оказалась на расстоянии 384 000 *км* от центра Земли). Сколько времени занял этот перелет?

2. Космическая ракета ($P$) двигалась вокруг Солнца ($S$) по круговой орбите, близкой к орбите Земли ($SP \approx 150 \cdot 10^6$ *км*). Благодаря непродолжительному включению ракетного двигателя скорость ракеты изменилась и стала параболической, причем вектор этой скорости оказался расположенным в плоскости орбиты Нептуна и направленным перпендикулярно к радиусу-вектору ракеты $SP$. Сколько времени потребуется затем ракете для полета с выключенным двигателем до орбиты Нептуна? Орбиту Нептуна можно считать окружностью, радиус которой равен 30,1 а. е.

3. Корабль-спутник, выведенный на околоземную орбиту, имеет такие параметры: высота в перигее $H_\pi = 180$ *км*, высота в апогее $H_\alpha = 340$ *км*, момент $t_0$ прохождения через перицентр — 9 часов 00 минут по московскому времени. На первом же витке должно быть включено тормозное устройство, которое позволит кораблю приземлиться в заранее указанном районе. Предварительные расчеты показали, что для этой цели следует включить тормозное устройство в тот момент, когда истинная аномалия корабля составит 270°. В какой момент времени $t_1$ следует включить тормозное устройство?

## § 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

1. В этом параграфе мы займемся определением промежутка времени, необходимого для перелета спутника по известной эллиптической или гиперболической орбите от перицентра до заданной точки орбиты $P$.

Мы видели, что это время $\tau$ выражается определенным интегралом через истинную аномалию $\theta$ точки $P$. Ниже мы убедимся, что продолжительность полета $\tau$ значительно проще выражается через другой параметр, $Z$, характеризующий положение точки $P$. Напомним (см. главу II, § 8), что уравнения

$$x = a\cos Z,\ y = b\sin Z \tag{1}$$

задают в параметрической форме:

а) *эллипс* (рис. 2.9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

если $a > b > 0$ и $Z$ пробегает вещественные значения от $-\infty$ до $\infty$ или от произвольного $d$ до $d + 2\pi$;

б) *левую ветвь гиперболы* (рис. 2.10)

$$\frac{x^2}{|a|^2} - \frac{y^2}{|b|^2} = 1, \tag{3}$$