2. Космическая ракета (P) двигалась вокруг Солнца (S) по круговой орбите, близкой к орбите Земли ($SP \approx 150 \cdot 10^6$ *км*). Благодаря непродолжительному включению ракетного двигателя скорость ракеты изменилась и стала параболической, причем вектор этой скорости оказался расположенным в плоскости орбиты Нептуна и направленным перпендикулярно к радиусу-вектору ракеты SP. Сколько времени потребуется затем ракете для полета с выключенным двигателем до орбиты Нептуна? Орбиту Нептуна можно считать окружностью, радиус которой равен 30,1 а. е.

3. Корабль-спутник, выведенный на околоземную орбиту, имеет такие параметры: высота в перигее $H_\pi = 180$ *км*, высота в апогее $H_\alpha = 340$ *км*, момент t_0 прохождения через перицентр — 9 часов 00 минут по московскому времени. На первом же витке должно быть включено тормозное устройство, которое позволит кораблю приземлиться в заранее указанном районе. Предварительные расчеты показали, что для этой цели следует включить тормозное устройство в тот момент, когда истинная аномалия корабля составит 270°. В какой момент времени t_1 следует включить тормозное устройство?

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

1. В этом параграфе мы займемся определением промежутка времени, необходимого для перелета спутника по известной эллиптической или гиперболической орбите от перицентра до заданной точки орбиты P.

Мы видели, что это время τ выражается определенным интегралом через истинную аномалию θ точки P. Ниже мы убедимся, что продолжительность полета τ значительно проще выражается через другой параметр, Z, характеризующий положение точки P. Напомним (см. главу II, § 8), что уравнения

$$x = a\cos Z,\ y = b\sin Z \tag{1}$$

задают в параметрической форме:

а) *эллипс* (рис. 2.9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

если $a > b > 0$ и Z пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞ или от произвольного d до $d + 2\pi$;

б) *левую ветвь гиперболы* (рис. 2.10)

$$\frac{x^2}{|a|^2} - \frac{y^2}{|b|^2} = 1, \tag{3}$$

если $a = -|a|$, $b = -i|b|$, $Z = iH$, где H пробегает вещественные значения от $-\infty$ до ∞.

Пусть орбита спутника P задана уравнениями вида (1). В каждый момент времени t положение спутника вполне определено, если задано соответствующее число Z, называемое *эксцентрической аномалией*. Например, если в какой-то момент t_0 эксцентрическая аномалия Z равна 0, то спутник имеет координаты $(a, 0)$, то есть находится в перицентре Π своей орбиты.

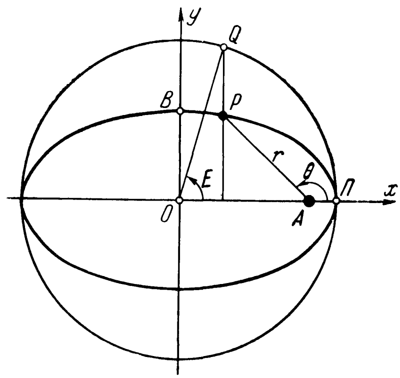

Рис. 3.1.

Эксцентрическая аномалия спутника P допускает в случае эллипса простое геометрическое истолкование как радианная мера некоторого угла (рис. 3.1). Построение этого угла, обозначаемого в случае эллиптического движения через E, достаточно ясно из рисунка *).

Так как притягивающий центр A имеет координаты $(c, 0)$ (см. главу II, § 8), а точка P имеет координаты $(a \cos Z, b \sin Z)$, то можно выразить длину r радиуса-вектора $\overrightarrow{AP}$ спутника P через эксцентрическую аномалию Z:

$$r^2 = AP^2 = (a \cos Z - c)^2 + (b \sin Z)^2.$$

Используя равенства

$$c = \varepsilon a,\ b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2),$$

после элементарной выкладки получим

$$r = |a (1 - \varepsilon \cos Z)|.$$

---

*) В случае гиперболической орбиты можно эксцентрическую аномалию Z представить в виде $Z = iH$ и числу H тоже можно дать геометрическое истолкование, а именно рассматривать его как площадь некоторого гиперболического сектора. Но мы на этой интерпретации останавливаться не будем, ибо она мало полезна.

Но выражение под знаком модуля всегда положительно — как в случае эллипса ($a > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $|\cos Z| = |\cos E| \leqslant 1$), так и в случае гиперболы ($a < 0$, $\varepsilon > 1$, $\cos Z = \cos iH = \operatorname{ch} H \geqslant 1$). Поэтому

$$r = a(1 - \varepsilon \cos Z). \tag{4}$$

2. Пусть спутник в момент t_0 находился в своем перицентре Π, а в момент t пришел в точку P, имеющую эксцентрическую аномалию Z. Приступим к выводу формулы, выражающей продолжительность перелета по пути ΠP через Z.

В каждый момент времени t величина Z связана с величиной r с помощью формулы (4), а r и t связаны между собой зависимостью [см. (2.6.1)]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sigma}{p} \varepsilon \sin \theta. \tag{5}$$

В последнюю зависимость входит ненужная для наших целей величина θ. Но ордината y точки P в любой момент времени t равна $b \sin Z$; и в то же время она равна $r \sin \theta$, так что

$$r \sin \theta = b \sin Z. \tag{6}$$

Исключив из равенств (4) — (6) r и θ, мы и найдем интересующую нас зависимость между Z и t. Для этой цели продифференцируем тождество (4):

$$\frac{dr}{dt} = a\varepsilon \sin Z \frac{dZ}{dt}. \tag{7}$$

Из формул (5) — (7) следует, что

$$r \frac{dZ}{dt} = \frac{b}{a} \frac{\sigma}{p} = \frac{b}{a} \sigma \frac{a}{b^2} = \frac{\sigma}{b}.$$

Так как $r = a(1 - \varepsilon \cos Z)$, то получим

$$(1 - \varepsilon \cos Z) \frac{dZ}{dt} = \frac{\sigma}{ab},$$

или

$$\frac{d}{dt}(Z - \varepsilon \sin Z) = n, \tag{8}$$

где

$$n = \sigma/ab. \tag{9}$$

Из (8), очевидно, следует, что

$$Z - \varepsilon \sin Z = n\,(t - t_0), \tag{10}$$

или

$$Z - \varepsilon \sin Z = n\tau. \tag{10'}$$

Последнее уравнение называется *уравнением Кеплера* для эллиптического и гиперболического движения.

Преобразуем выражение для n. Так как мы условились ограничиться случаем прямого движения спутника ($\sigma > 0$), то $\sigma = \sqrt{Kp}$ и

$$|n| = \frac{\sigma}{|a|\,|b|} = \frac{1}{|a|\,|b|}\sqrt{Kp} = \frac{\sqrt{K}}{|a|\,|b|}\sqrt{\frac{|b|^2}{|a|}},$$

то есть

$$|n| = \sqrt{K/|a|^3}. \tag{11}$$

В случае эллипса

$$a > b > 0,\ n = |n|. \tag{12}$$

В случае гиперболы

$$a = -|a|,\ b = -i\,|b|,\ n = -i\,|n|. \tag{13}$$

Сравнивая формулы (11) и (12) с (2.10.4) и (2.10.3), убеждаемся в том, что в случае эллиптического движения n есть средняя угловая скорость движения спутника по орбите, то есть его среднее движение.

Запишем основные из полученных сейчас формул в таком виде, в котором они обычно встречаются в литературе. Полагая $Z = E$ в случае эллипса и $Z = iH$ в случае гиперболы, из (4) и (10) — (13) получим:

для эллиптического движения

$$r = a\,(1 - \varepsilon \cos E), \tag{14}$$

$$n = \sqrt{K/a^3}, \tag{15}$$

$$E - \varepsilon \sin E = n\,(t - t_0); \tag{16}$$

для гиперболического движения

$$r = |a|(\varepsilon \operatorname{ch} H - 1), \tag{17}$$

$$|n| = \sqrt{K/|a^3|}, \tag{18}$$

$$\varepsilon \operatorname{sh} H - H = |n|(t - t_0). \tag{19}$$

Величину $M = n(t - t_0)$ в случае *эллиптического* движения обычно называют *средней аномалией* спутника. Она имеет простой механический смысл: это радианная мера дуги, которую описал бы между моментами t_0 и t фиктивный, воображаемый спутник Ф, если бы он двигался равномерно с угловой скоростью n.

3. Связь между эксцентрической аномалией Z и истинной аномалией θ следует из формул

$$r = \frac{p}{(1 + \varepsilon \cos\theta)}, \; r = a(1 - \varepsilon\cos Z) \text{ и } p = a(1 - \varepsilon^2).$$

Отсюда получим:

$$1 - \varepsilon\cos Z = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\cos\theta}. \tag{20}$$

Пользуясь формулой (20), легко вычислить последовательно значения для $\cos\theta$, $1 - \cos\theta$, $1 + \cos\theta$, $\operatorname{tg}\theta/2$:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\operatorname{tg}^2\frac{Z}{2}. \tag{21}$$

Задачи

1. Космолет при выходе на эллиптическую орбиту относительно Земли на высоте 230 *км* имеет начальную скорость $V_0 = 10{,}95$ *км/сек*. Вектор скорости в этот момент направлен параллельно поверхности Земли и лежит в плоскости лунной орбиты. Найдите время полета космолета до орбиты Луны, считая, что Луна движется вокруг Земли по окружности радиуса $r = 384\,400$ *км*.

2. Решите предыдущую задачу в предположении, что $V_0 = 12{,}0$ *км/сек*.

3. В начале рассматриваемого участка перелета спутник Солнца находился в своем перигелии, в конце участка — на расстоянии r от центра Солнца. При этом радиус-вектор спутника повернулся меньше чем на пол-оборота вокруг Солнца. Сколько времени (τ) занял перелет? Дайте явное выражение τ через ε, a, K, r (движение происходит на эллипсу).

4. Выразите скорость v спутника, движущегося по эллиптической или гиперболической орбите, и ее радиальную и поперечную составляющие v_r и v_n через K, a, ε, E (или соответственно H).

5. Орбита спутника — эллипс или гипербола. Известны параметры ε, a, K. Сколько времени (τ) займет перелет спутника от перицентра до точки с истинной аномалией θ?

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА

1. Уравнением Кеплера (3.2.10) (в виде (3.2.16) или (3.2.19)) приходится пользоваться также в тех случаях, когда необходимо предсказать, где, в какой точке своей орбиты, будет находиться спутник в заранее указанный момент времени. В этом случае *дано* τ, искомыми же величинами являются эксцентрическая аномалия Z, а также две функции от эксцентрической аномалии: r и θ. Уравнение (3.2.10) является трансцендентным относительно Z.

Покажем сначала, что уравнение Кеплера — и в случае эллиптического движения ($0 < \varepsilon < 1$), и в случае гиперболического движения ($\varepsilon > 1$) — для каждого заданного τ имеет решение, и притом единственное.

а) *Эллиптическое движение.* Уравнение Кеплера может быть записано в виде

$$E - \varepsilon \sin E = M, \tag{1}$$

где $M = n\tau = n(t - t_0)$. Сначала предположим, что число M не делится нацело на π (то есть при любом целом k $M \neq k\pi$). Тогда можно подобрать такое целое число k, что

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(E) = E - \varepsilon \sin E. \tag{2}$$

Эта непрерывная функция монотонно возрастает на интервале $(-\infty, \infty)$, ибо

$$\frac{d\Phi}{dE} = 1 - \varepsilon \cos E = \frac{r}{a} > 0.$$

Поэтому $\Phi(E)$ принимает значение M *не более чем при*